Kern & Teilchen 10.04.08

Nächste Woche 17.4. HS 8

Server Passwort: ZDdAØØ5

$\boxed{\text{Größe der Atomkerne}}$ (bestimmen)

e^- Kernstreuung — WW mit Kernladungswert.

μ-Atome — μ: $mc^2 \sim 105\,\mathrm{MeV}$

(Myonische Atome) — $r_N \propto \frac{1}{m}$

$\Delta E = E_{exp} - E_{Coulomb}$

Ladungswert

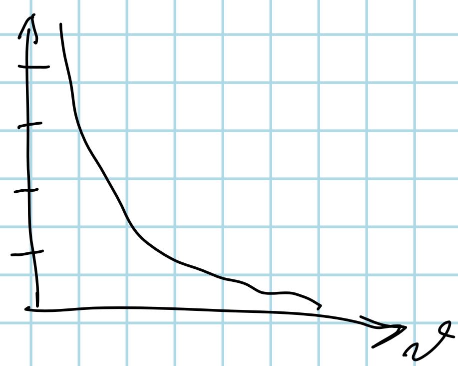
Kerndichte: n, p − Kernstreuung } Nukleonenwert

Auch α − Teilchen möglich

Wirkungsquerschnitt

e^- − Kernstreuung $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Rutherf.} \propto \frac{1}{\sin^4\frac{\vartheta}{2}}$

sehr stark nach vorne gerichtet



$$\frac{d\sigma}{d\Omega}_{e^-\text{Kern}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_R \cdot |F(q)|^2$$

e^- Formfaktor

e^- hat $200 \times m_0$ → relativistisches Teilchen

Helizität: Spin & Impuls in gleiche Richtung: +1

sonst −1 (Erhaltungsgröße)

siehe Abb 3.14 Warum ändert sich H?

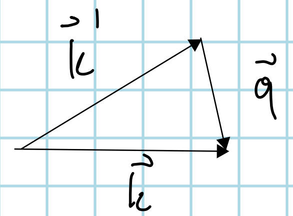
Kann nicht sein – Rückwärtsstreuung muss unterdrückt werden! Neuer Faktor

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_R \cdot |F(q)|^2 \cos^2\frac{\vartheta}{2}$$ // Mottscher W-Quersch. f. rel. Teilchen

Da aber die Teilchen nicht ganz c haben sieht d. Faktor so aus:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{e^- \text{-Kern}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_R \left(1 - \beta \sin^2\frac{\vartheta}{2}\right) F^2(q)$$

Abb 3.15 Ordinate: Division nimmt die Winkelabh. d. Mottschen WQ heraus!



Ladungsvert. sind Quadrate d. Fourier-transformierten. Abb. 3.16

kleine Kerne: Gauß-Kurven

größere: Fermi- $\rho(r) = \rho_0 \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{r-R}{a}\right)}$

a: Oberflächenverschmierung $\sim 0{,}5 - 0{,}6$ fm

R: Halbdichte-Radius $\sim 1{,}2\, A^{\frac{1}{3}} + c$ fm

(A: Massenzahl)

3 Param Fermi:

$$\rho(r) = \rho_0 \cdot \frac{1 + d r^2}{N}$$

$$\int d^3r\, \rho(r) = Z \cdot e_0$$

(Z: Ladungszahl)

besser: Fourier - Bessel Dstg.

$$\rho(r) = \sum_{\gamma=1}^{\infty} a_\gamma \underbrace{\frac{\sin(a_\gamma \cdot \gamma / \hbar)}{q_\gamma \cdot r / \hbar}}_{j_0(q_\gamma r/\hbar)} \qquad q_\gamma = \gamma q$$

//Abb 3.17 spärische Bessel Fkt

Abb 3.18: Fehlerbalken: je näher ins Innere desto schlechter

3.15: Tiefere Punkte sind schwieriger zu bestimmen - größere Fehlerbalken bei höheren q-Werten

Nukleonen Streuung (schwieriger als Ladungsvert.)

Kerne an Kernen ... Deuteronen - 85 MeV

Ruheenergie: 2 GeV → nicht rel. Theorie

benötigt (3.19) Born'sche Näherung unzulässig

höhere Energien benötigt

Neutronen haben einen > Rad. als Prot - bilden Haut

$\boxed{\text{Multipolmomente}}$ (elektromagn.)

$Z e_0$, Q_{20} — elektr. Quadrupolmoment, M_{10} — magn. Dipolmoment

Dirac Gl: $\{ c \vec{\alpha} \vec{p} + \beta m c^2 - \underbrace{q c \vec{\alpha} \cdot \vec{A}}_{\text{Feld angekoppelt}} \} \psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi - q \phi \psi$

Fehlen S34 kovar. Ableitg. $\partial^\mu - \frac{iq}{\hbar} A^\mu$ | $\psi = \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix}$

$\rightarrow \vec{p} - q\vec{A}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2m}(\vec{\sigma}\vec{p} - q\vec{\sigma}\vec{A})\left[1 + \frac{E - mc^2 - q\phi}{2mc^2}\right]^{-1}(\vec{\sigma}\vec{p} - q\vec{\sigma}\vec{A})\psi_A + \dots$$

$$\dots q\phi\psi_A = \underbrace{(E - mc^2)}_{\text{nichtrel. kin Energie}}\psi_A$$

$$\hat{H}_{magn} = \underbrace{-\frac{q}{2m}\left[(\vec{\sigma}\vec{p})(\vec{\sigma}\vec{A}) + (\vec{\sigma}\vec{A})(\vec{\sigma}\vec{p})\right]}_{\text{Zeeman-Term}} + \underbrace{\frac{q^2}{2m}(\vec{\sigma}\vec{A})(\vec{\sigma}\vec{A})}_{\text{diamagn Term}}$$

n. f. Neutronensterne

Rel: $(\vec{\sigma}\vec{A})(\vec{\sigma}\vec{B}) = \vec{A}\vec{B} + i\vec{\sigma}(\vec{A}\times\vec{B})$

$$\rightarrow \hat{H}_{magn} = -\frac{q}{2m}\Big[\underbrace{(\vec{p}\vec{A} + \vec{A}\vec{p})}_{1.T} + \underbrace{i\vec{\sigma}(\vec{A}\times\vec{p} + \vec{p}\times\vec{A})}_{2.T}\Big]$$

// mit $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$

$$i(-i\hbar)\left[\sigma_i \varepsilon_{ijk} A_j \partial_k + \sigma_i \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k\right]$$

// Prod-Regel, Ableitung wirkt hinaus

$$\partial_j A_k = (\partial_j A_k) + A_k \partial_j$$

✓: ε Tensor umtauschen, Terme kürzen sich

2.T

$$i(-i\hbar)\sigma_i \underbrace{\varepsilon_{ijk}(\partial_j A_k)}_{\underbrace{(\vec{\nabla}\times\vec{A})_i}_{B_i}} = \underbrace{+\hbar\vec{\sigma}\vec{B}}_{2\underbrace{\frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}}_{\vec{s}}\vec{B}} = 2\vec{s}\vec{B}$$

$$\rightarrow \boxed{\hat{H}_{magn} = -\frac{e_0}{2m}\underbrace{\left(\frac{q}{e_0}\right)}_{g_e}\underbrace{[\vec{p}\vec{A} + \vec{A}\vec{p}]}_{1T} - \frac{e_0}{2m}\underbrace{\left(2\frac{q}{e_0}\right)}_{g_s}\underbrace{\vec{s}\vec{B}}_{2T}}$$

Def: Op. d. Ladungsdichte: // nur 1.T betrachtet

$$\rho_e(\vec{r}) = e_0 \sum_{i=1}^{Z} \delta(r - r_i)$$

$$\rho(r) = \int d^3 r_1 \dots \int d^3 r_Z \; \psi^+(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_Z)\,\hat{\rho}_e\,\psi(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_Z)$$

$\langle \psi | \hat{\rho}(\vec{r}) | \psi \rangle$ f Produkt WF $\quad \psi(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_z) = \psi_1(\vec{r}_1) \cdot \dots \cdot \psi_z(\vec{r}_z)$

$$\rho(\vec{r}) = e_0 \sum_{i=1}^{z} |\psi_i(\vec{r})|^2$$ // reine Prod WF – einf Modell

Oper. d. Stromdichte

$$j = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^* \vec{\nabla}\psi - (\vec{\nabla}\psi^*)\psi\right)$$ // f 1 – Teilchen

f viele : $\boxed{\hat{j}_e(\vec{r}) = \frac{q}{2m} \sum_{i=1}^{z} [\vec{p}_i\, \delta(\vec{r}-\vec{r}_i) + \delta(\vec{r}-\vec{r}_i) \cdot \vec{p}_i]}$

// nur Protonen haben Ladung

$$\hat{H}_e = -\sum_{i=1}^{z} \frac{q}{2m} [\vec{p}_i \vec{A}_i + \vec{A}_i \vec{p}_i] = -\int d^3r\, \hat{j}_e \vec{A}(\vec{r}) = *_1$$

Anteil v Bahndrehimpuls

// nur Protonen i d Summe $\qquad$ Wenn man nogh Beiträge haben will dann ist das $\hat{j}\vec{A}$

1T : H_e $\qquad$ 2T : H_s

<u>Stationäre Kernzustände</u> : $\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{\text{hier } \emptyset} + \vec{\nabla}\vec{j} = \emptyset \quad \rightarrow \quad \vec{\nabla}\vec{j} = \emptyset$

div freies Feld

$$\Rightarrow \vec{j} = \vec{\nabla} \times \vec{\mu}_e(\vec{r})$$

$$*_1 := -\int d^3r\, \underbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{\mu}_e(\vec{r}))}_{\varepsilon_{ijk}(\partial_j \mu_k) A_i} \vec{A}(\vec{r}) = *_2 \quad \text{// part Int.}$$

$$\underbrace{\partial_j(\mu_k A_i)}_{\text{Oberflächenint} = \emptyset} - \mu_k \partial_j A_i$$

$$*_2 := -\left[\int \underbrace{dx_1\, dx_2\, dx_3\, \partial_j (\mu_k A_i)}_{\text{Oberflächen} \int = \emptyset} - \int d^3r\, \mu_k \underbrace{\varepsilon_{ijk}(\partial_j A_i)}_{-\varepsilon_{kij}(\partial_j A_i)}\right]$$

kann man $\int$

$$\sim \underbrace{\varepsilon_{kij}(\partial_j A_i)}_{(\vec\nabla \times \vec A)}$$

$$*_2 = -\frac{g}{e_0}\int d^3r\, \vec\mu_\ell(\vec r)\cdot\vec B(\vec r)$$

$$\vec\mu_s = \sum_{i=1}^{A} g_s^i\, \mu_N\, \frac{1}{\hbar}\, \vec s_i\, \delta(\vec r - \vec r_i)$$ // Spinmomentdichte

$$\mu_N = \frac{e_0\hbar}{2m_p}$$

$$\boxed{\hat H_{magn} = -\int d^3r \left(\vec\mu_\ell(\vec r) + \vec\mu_s(\vec r)\right)\cdot\vec B(\vec r)}$$

$\vec\nabla\times\vec B = \emptyset$ // keine Verschiebungsstromdichte etc...

$\vec B = -\vec\nabla\,\Xi(\vec r)$ $\qquad \vec\nabla\vec B = \vec\nabla(-\vec\nabla\,\Xi) = \emptyset$

großes X_i?

$\rightarrow \boxed{\Delta\,\Xi = \emptyset}$

Lsg vom Ursprung aus (in KKoord.) siehe Elektr
nur reguläre

$$\Xi(\vec r) = \sum_{l,m}(-1)^m\, \Xi_{l,-m}\, r^l\, Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$$

Entwicklungskoeff

Wie ändert sich $\hat H_m$, wenn ich B ändere? 1. Ord Störtheorie

$$E_{magn}(I,M) = \langle I M | \hat H_{magn} | \underbrace{I M}_{\text{Zustände}}\rangle = \sum_{l,m}(-1)^m\, \Xi_{l,-m}\, M_{lm}(I,M)$$

$$M_{lm}(I,M) = \langle I M | \int d^3r\, \vec\mu(\vec r)\left[\vec\nabla r^l\, Y_{lm}(\vartheta,\varphi)\right] | I M\rangle$$

Ausrechnen d Matrixelements:

Trick: $\vec r\times\vec j_\ell = \frac{g}{2m}\sum_{i=1}^{Z}\left[\underbrace{\vec r\times\vec p_i}_{\vec\ell_i}\, \delta(\vec r-\vec r_i) + \delta(\vec r-\vec r_i)\underbrace{\vec r\times\vec p_i}_{\vec\ell_i}\right]$

// $\vec\mu(\vec r) = \vec\mu_\ell(\vec r) + \vec\mu_s(\vec r)$

Rel wird nicht bewiesen (geht über Gauss?):

$\langle IM | \int d^3r\, \vec{r} \times \vec{j}_e \, [\vec{\nabla} r^l Y_{lm}(\vartheta,\varphi)] | IM \rangle =$

$(l+1) \langle IM | \int d^3r\, \hat{\mu}_e(\vec{r}) \, [\vec{\nabla} r^l Y_{lm}(\vartheta,\varphi)] | IM \rangle$

1 Matrixelem. d. ein anderes ausdrücken!

$\vec{l} \quad \vec{\nabla} r^l Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$

$\vec{r} \times \vec{p}$

$\vec{r}(\vec{\nabla} \times \vec{\nabla}) \quad$ // wird $\emptyset$

$\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i$

$$M_{lm}(I,M) = \langle IM | \sum_{i=1}^{A} \left[\frac{2}{l+1} g_{l_i} \cdot \frac{\vec{l}_i}{\hbar} + g_{s_i} \frac{\vec{s}_i}{\hbar} \right] \mu_N \left(\vec{\nabla} r^l Y_{lm}(\vartheta,\varphi) \right) \cdot | IM \rangle$$

(1 1, 2 2, 3 3)

Was macht Parität-Op. auf l?

$\Pi \vec{l} \Pi = \vec{l}$

$\Pi \vec{\nabla} \Pi = -\vec{\nabla}$

$\Pi \vec{s} \Pi = \vec{s}$

$\Pi Y_{lm} \Pi = (-1)^l Y_{lm}$

Annahme: $|IM\rangle$ Paritätseigenzustand

$\Pi\Pi$ einführen bei Zahlen: 1 1, 2 2 & 3 3

$$\Pi_I \underbrace{\Pi \vec{l} \Pi}_{+1} \underbrace{\Pi \vec{\nabla} \Pi}_{-1} \underbrace{\Pi Y_{lm} \Pi}_{(-1)^l} \Pi_I = +1$$

$\Pi^2 = +1 \qquad \boxed{(-1)^{l+1} = 1} \qquad$ // wenn $l+1$ = gerade

Wenn Kernzust. Eigenz. d. Paritätsop. sind, so verschwinden alle geraden Multipolmomente. Gibt es doch ein Moment, so ist die Wechselw. paritätsverletzend!