Kern & Teilchen 17.04.08

User: ktstud

pass: ZDdA005

2.6.1 Magn. Multipolentw.

$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \emptyset$ $\quad\quad \vec{B} = -\vec{\nabla}\, \Xi(\vec{r})$

$\vec{\nabla}\vec{B} = \emptyset$ $\quad\quad \Delta\, \Xi(\vec{r}) = \emptyset$

$$\Xi(\vec{r}) = \sum_{l,m} (-1)^m\, \Xi_{l,-m}\, r^l\, Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

$$\Delta E_{magn} = E_{magn} - \langle I M | \hat{H}_{magn} | I M \rangle = \sum_{l,m} (-1)^m\, \Xi_{l,-m}\, M_{lm}(I, M)$$

$$\hat{H}_{magn} = - \int d^3r\, \underbrace{\vec{\mu}(\vec{r})}_{\vec{\mu}_l(\vec{r}) + \vec{\mu}_s(\vec{r})}\, \vec{B}(\vec{r})$$

$$\boxed{M_{lm} = \langle I M | \int d^3r\, \vec{\mu}(\vec{r}) \cdot [\vec{\nabla} r^l\, Y_{lm}(\vartheta, \varphi)] | I M \rangle}$$

statische magn. Multipolmomente

$$\rightarrow \boxed{M_{lm} = \langle I M | \sum_{i=1}^{A} \left\{ \frac{2}{l+1}\, g_{l_i} \frac{\vec{l}_i}{\hbar} + g_{s_i} \frac{\vec{s}_i}{\hbar} \right\} \mu_N \left[\vec{\nabla} r_i^l\, Y_{lm}(\vartheta_i, \varphi_i) \right] \cdot | I M \rangle}$$

$\hat{\Pi}$: Paritäts-operator

$\hat{\Pi}^2$ einführen

$$\left.\begin{aligned} \hat{\Pi}\, \vec{r}\, \hat{\Pi} &= -\vec{r} \\ \hat{\Pi}\, \vec{p}\, \hat{\Pi} &= -\vec{p} \end{aligned}\right\} \text{polaren Vektor}$$

$$\left.\begin{aligned} \hat{\Pi}\, \vec{l}\, \hat{\Pi} &= \vec{l} \\ \hat{\Pi}\, \vec{s}\, \hat{\Pi} &= \vec{s} \end{aligned}\right\} \text{axialer Vektor}$$

$$\hat{\Pi}^2 = \hat{\Pi} \cdot \hat{\Pi} = (-1)^2 = +1$$

$$\hat{\Pi}\, Y_{lm}\, \hat{\Pi} = (-1)^l\, Y_{lm}$$

Ann.: $|I M\rangle$ ist EV v. $\hat{\Pi}$

$\rightarrow \hat{\Pi} |I M\rangle = \pi(I, M) |I M\rangle$

$$\pi(I,M)\, (+1)(-1)(-1)^l\, \pi(I,M) = (-1)^{l+1}$$

$l = 0, 2, 4, 6 \ldots$ alles dazwischen

$$\langle I M | G | I M \rangle = - \langle I M | G | I M \rangle \Rightarrow \langle I M | G | I M \rangle = \emptyset$$

$\ell = 1, 3, 5, 7 \ldots$ magn. Multipolm.: M_{1m}, M_{3m}, M_{5m}

$\langle IM | G | IM \rangle$ könnte $\neq \emptyset$ sein $\rightarrow$ hier gibt es magn. Multipol-momente

Wenn $\langle IM|$ ein Paritäts-Eigenz. ist, so gibt es keine geraden Multipol-momente

CPT Symmetrie & elektr. Dipolm. d. Neutrons.

$|I - I| \leq \ell \leq I + I \qquad 0 \leq \ell \leq 2I$

$M_{\ell m} = \emptyset \qquad \ell > 2I \quad ! \qquad *_1$

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{axialsymm. Felder} \qquad M_{10}, M_{30}, M_{50} \neq \emptyset \\ E_{magn} = \sum_{\ell} \Xi_{\ell 0} \, M_{\ell,0}(IM) \end{array}}$$

$*_1 \quad \int d\Omega \, Y^*_{\ell_I m_I}(\vartheta, \varphi) \, Y_{\ell m}(\vartheta, \varphi) \, Y_{\ell_I m_I}(\vartheta, \varphi)$ // nur Beispiel

Dreiecksungl. d. Drehimpulse

Anf.: $\vec{j}_i$

Ende: $\underbrace{\vec{j}_S + \vec{j}_\gamma}_{\vec{j}_f} \qquad |\vec{j}_i - \vec{j}_f| \leq \vec{j}_\gamma \leq \vec{j}_i + \vec{j}_f$

zB Wigner Eckart.-

Klebsch Gordan

$$\langle IM | T_q^{(k)} | IM' \rangle = \underbrace{\langle IM \, k \, q | IM \rangle}_{|I-k| \leq I \leq I+k} \langle I \| T^{(k)} \| I \rangle$$

$\rightarrow |I - I| \leq k \leq I + I \qquad // \; \emptyset \leq k \leq 2I$

Zustände ohne Gesamtdrehimp. $I = \emptyset$ haben kein Dipolmoment !!
(Kerne)

Magn. Dipolmoment $\quad M_{10}(I,M)$

$$E_{magn}(I,M) = \Xi_{10}\, M_{10}(I,M)$$

$$\Xi(\vec{r}) = \sum_{l,m} (-1)^m\, \Xi_{l,-m}\, r^l\, Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$$

$l=1,\ m=0 \qquad \Xi_{1,0}\, r^1\, Y_{10}(\vartheta,\varphi) = \Xi_{1,0}\, \underbrace{r \sqrt{\tfrac{3}{4\pi}} \cos\vartheta}_{z} = \Xi_{10} \sqrt{\tfrac{3}{4\pi}}\, z$

$\vec{B} = -\vec{\nabla}\, \Xi(\vec{r}) \qquad B_z(\emptyset)\, \underset{EV}{\hat{z}} = B_z\, \hat{z} = -\sqrt{\tfrac{3}{4\pi}}\, \Xi_{1,0}\, \hat{z}$

$$M_{1,0}(I,M) = \sqrt{\tfrac{3}{4\pi}} \langle I M | \underbrace{\sum_{i=1}^{A} \left(g_{l_i} \frac{l_{z_i}}{\hbar} + g_{s_i} \frac{s_{z_i}}{\hbar} \right) \mu_N}_{\vec{\mu}} | I M \rangle$$

Konvention: jenes Moment wo der Zust. voll ausgerichtet ist

= magn. Dipolm.

$$\boxed{\mu = \langle I I | \hat{\mu}_z | I I \rangle \quad \text{magn Dipolmoment}}$$

$M_{10}(I,M)$

$$\langle I M | T_q^{(k)} | I M' \rangle = \underbrace{\langle I M\, kq | I M' \rangle}_{\text{Clebsch Gordan koeff}} \underbrace{\langle I \| T^{(k)} \| I \rangle}_{\text{reduzierte Matrixelem., hängt nicht von magn. QZ ab!}}$$

$$\langle I I | T_q^{(k)} | I I \rangle = \langle I I\, kq | I I \rangle \langle I \| T^{(k)} \| I \rangle$$

Wigner Eckart anwend.

$$M_{10}(I M) = \frac{\langle I M\, 10 | I M \rangle}{\langle I I\, 10 | I I \rangle} M_{10}(I,I)$$

// Matrixelem. umdrehen

$$\frac{(-1)^{I-I} \langle I M\, I-M | 1 0 \rangle}{\langle I I\, I-I | 10 \rangle} M_{10}(I,I) = \frac{M}{I} M_{10}(I,I)$$

$\rightarrow E_{magn}(I,M) = \Xi_{10} M_{10}(I,M) = -g_I \mu_N M \cdot B_z(\emptyset)$

Spezialfall Einteilchenmodell A-Nukleonen

Ann: alle haben sich zu ges. $\ell = \emptyset$ gepaart und nur 1 Nukl trägt d Spin

Nukleon : $\ell \; s \; j \; m_j$ // j-Schema

$$\mu = \langle \underbrace{\ell s}_{\text{zus. QZ}} \; \underbrace{j}_{I} \; \underbrace{j}_{M=I} \,|\, g_\ell \frac{\vec{\ell}}{\hbar} + g_s \frac{\vec{s}}{\hbar} \,|\, \ell s \, j j \rangle \mu_N$$

Wigner - Eckart Theorem ...

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{q=-1}^{1} (-1)^q A_q^{(1)} B_{-q}^{(1)}$$

Jensor 1. Stufe

$$\langle j m | \vec{A} | j m' \rangle = \langle j m \; 1 q | j m' \rangle \langle j \| A^{(1)} \| j \rangle$$

$$\langle j m | \vec{B} | j m' \rangle = \langle j m \; 1 \; q | j m' \rangle \langle j \| B^{(1)} \| j \rangle$$

$$\langle j m | \vec{A} \vec{B} | j m \rangle = \langle j m | \sum_{q=-1}^{1} (-1)^q A_q^{(1)} \underset{\downarrow}{} B_{-q}^{(1)} | j m \rangle = *_2$$

$$\sum_{m''} | j m'' \rangle \langle j m'' |$$

// Einheitsop. im Unterraum eingeführt

$$= \sum_{m''} \sum_{q=-1}^{1} (-1)^q \underbrace{\langle j m | A_q^{(1)} | j m'' \rangle}_{\substack{\langle j m \, 1 q | j m'' \rangle \\ \times \langle j \| A^{(1)} \| j \rangle}} \underbrace{\langle j m'' | B_q^{(1)} | j m \rangle}_{\substack{\langle j m'' \, 1 \, -q | j m \rangle \\ \times \langle j \| B^{(1)} \| j \rangle}}$$

$$*_2 = G \langle j \| A^{(1)} \| j \rangle \langle j \| B^{(1)} \| j \rangle$$

Projektionstheorem

$$\left.\begin{aligned} \langle jm | A_z | jm' \rangle &= \langle jm\, 10 | jm' \rangle \langle j \| A \| j \rangle \\ \langle jm | j_z | jm' \rangle &= \langle jm\, 10 | jm' \rangle \langle j \| j \| j \rangle \end{aligned}\right\}$$

$$\langle jm | \vec{j}\vec{A} | jm' \rangle = G(m,m') \langle j \| j \| j \rangle \langle j \| A \| j \rangle$$

$$\langle jm | \vec{j}\cdot\vec{j} | jm' \rangle = G(m,m') \langle j \| j \| j \rangle \langle j \| j \| j \rangle$$

Verhältnisse

$$\frac{\langle jm | A_z | jm \rangle}{\underbrace{\langle jm | j_z | jm \rangle}_{m\hbar}} = \frac{\langle jm | \vec{j}\vec{A} | jm \rangle}{\underbrace{\langle jm | \vec{j}\vec{j} | jm \rangle}_{j(j+1)\hbar^2}}$$

$$\langle jm | A_z | jm \rangle = \frac{m\hbar}{j(j+1)\hbar^2} \langle jm | \vec{j}\vec{A} | jm \rangle$$

$\vec{A} = \vec{\ell}$ $\qquad \vec{j}\cdot\vec{\ell}$ $\qquad \vec{j} = \vec{\ell} + \vec{s} \Rightarrow (\vec{j} - \vec{\ell}) = \vec{s}$

allg. Op jetzt $\vec{\ell}$ gesetzt

$$\vec{j}^2 + \vec{\ell}^2 - 2\vec{\ell}\vec{j} = (\vec{j} - \vec{\ell})^2 = \vec{s}$$

$$\vec{\ell}\vec{j} = \frac{1}{2}(\vec{j}^2 + \vec{\ell}^2 - \vec{s}^2)$$

$$\langle jm | \vec{\ell}\vec{s} | jm \rangle = \frac{1}{2}\left[j(j+1)\hbar^2 + \ell(\ell+1)\hbar^2 - s(s+1)\hbar^2\right]$$

$$\boxed{\langle jm | \ell_z | jm \rangle = \frac{m\hbar}{j(j+1)} \frac{1}{2}\left[j(j+1) + \ell(\ell+1) - s(s+1)\right] = \frac{j(j+1) + \ell(\ell+1) - s(s+1)}{2(j+1)} \cdot m\hbar}$$

$j = \ell + \frac{1}{2}$

$j = \ell - \frac{1}{2}$

$$\boxed{\mu = \left\{\frac{1}{2}(g_\ell + g_s) + \frac{\ell(\ell+1) - 3/4}{2(j+1)}(g_\ell - g_s)\right\}\mu_N}$$

$$\boxed{\mu = \mu_N \begin{cases} g_\ell\left(j - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} g_s & j = \ell + \frac{1}{2} \\ \left[g_\ell\left(j + \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2} g_s\right]\frac{j}{j+1} & j = \ell - \frac{1}{2} \end{cases}}$$

Schmitt – Schüller Linien

siehe Grafik 2.17

Neutron hat kein g_ℓ ?

$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) \qquad \Delta\phi(\vec{r}) = \emptyset$

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{l,m} (-1)^m \Phi_{l,-m} r^l Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$$

// nur f. 1 Teilch. hingeschrieben

$$E_{el}(I,M) = \langle IM | \hat{H}_{el} | IM \rangle = \langle IM | q \sum_{l,m} (-1)^m \phi_{l,-m} r^l Y_{lm}(\vartheta,\varphi) | IM \rangle$$

$q \to \sum_{i=1}^{Z}$ // f. mehrere; $\vartheta,\varphi \to \vartheta_i, \varphi_i$

elektr. Multipolmom.

$$= \sum_{l,-m} (-1)^m \phi_{l-m} Q_{lm}(I,M)$$

Annahme: $\hat{\Pi}|IM\rangle = \pi(I,M)|IM\rangle$

$$Q_{lm} = \langle IM | \sum_{i=1}^{Z} r_i^l Y_{lm}(\vartheta,\varphi) | IM \rangle =$$

$\hat{\Pi}^2 = 1 \qquad \hat{\Pi}^2 = 1$

$$= (-1)^l \langle IM | \sum_{i=1}^{Z} r_i^l Y_{lm}(\vartheta_i,\varphi_i) | IM \rangle \qquad // \ 0 \leq l \leq 2I$$

$l = 0, 2, 4, 6, 8 \qquad Q_{lm} \neq \emptyset$

$\left.\begin{array}{l} l = 1, 3, 5, \ldots \\ l > 2I \end{array}\right\} Q_{lm} = \emptyset$

Q_{00} Ladung immer beob.

Q_{20} $I = 0, \frac{1}{2}$; $Q_{20} = \emptyset$

Quadrupolmom. erst ab $I = 1$

zB Deuteron

Elektrisches Quadrupolmom. (radialsymm.)

$$Q_{20}(I,M) = \frac{\langle IM \; 20 | IM \rangle}{\langle II \; 20 | II \rangle} Q_{20}(II)$$

$$= \frac{3M^2 - I(I+1)}{3I^2 - I(I+1)} Q_{20}(II)$$

Y_{20} : V.V. $\sim \frac{16\pi}{5}$

spektroskop. Quadrupolm.

$$\boxed{Q = \frac{1}{e_0}\sqrt{\frac{16\pi}{5}}\, Q_{20}(II)}$$

$$Q_{eff} = \frac{3M^2 - I(I+1)}{3I^2 - I(I+1)} Q \qquad \text{eff. Quadrupolmom.}$$

$$r^2 Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\, r^2 \underbrace{(3\cos^2\vartheta - 1)}_{3z^2 - r^2}$$

$$Q = \langle II | 3z^2 - r^2 | II \rangle = 3\langle z^2 \rangle - \langle r^2 \rangle$$

eff Quadrupolm. kann neg. sein, obwohl spektrosk. pos. ist!