

Kapitel 2

Mesurische FG bei Kernen ignorieren

6 Größenordnungen von 1 fm \sim 1 Å

Starke & Reichweite der Kräfte von em & starke dafür

verantwortl. Bindungs E \sim 1% d. Ruhe E \rightarrow nicht rel

$${}^A_Z X_N$$

Kerne haben angereg. Zustände - abregung d. γ

MeV - Bereich Dauern: $10^{-9} - 10^{-15}$ s

Isotope: Z, e⁻ gleich N unterschied. Unterschied nukleares E₀

Isobare: A gleich \rightarrow ähnliche nukleare

Isotone: N gleich

Nukleardichte: $\frac{0,15 \text{ N}}{\text{fm}^3}$ ändert sich wenig mit abw. d. Nukl.

\rightarrow Sättigung

$$V = V_0 A \approx 7,2 \text{ fm}^3$$

$$V_0 = \frac{4 r_0^3 \pi}{3} \rightarrow r_0 = \sqrt[3]{\frac{3 V_0}{4 \pi}} \approx 1,2 \text{ fm}$$

$$R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3V_0 A}{4\pi}} = r_0 A^{\frac{1}{3}}$$

Bei $A < 20$ steigt Dichte im Kerninneren \rightarrow statt norm. Rad.

rms:

$$r_{\text{rms}} = \frac{\int d^3r r^2 \rho}{\int d^3r \rho}$$

homogene Nukl.: $r_{\text{rms}}^2 = \frac{3}{5} R^2$

Bindungs E: $B = (Z m_p + N m_n - m(A, Z)) c^2$

hier positiv

Mass d. Kerns

Steigt bis Fe (Maximum), dann fällt es leicht

$B \approx A \cdot 8 \text{ MeV}$ // f. Kerne

$B = Z \frac{7}{3}$ // f. alle e^- im Atom

Verhalten wegen beachn. d. Coulomb & starke WW

B steigt nicht mit Anz. d. WW-Paare sondern

um nächste Nachbarn WW!

Fusion: 2 leichte Kerne E_a wird frei

Spaltung: 1 schwerer Kern E_a wird frei

↓
wird Anregung, dann Spaltung

Massen

Massen von Ionen bestimmen, m_e & E_0 subtrahieren $\rightarrow m_{\text{neu}}$

1) Massenpektrom., 2) Ionenfallen, 3) Kernreaktion (Kinematik)

1) Ablenkung im E & B Feld

$\vec{F} = q \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}$

$m \vec{a} = q \vec{E}$

$L = v t$ // nicht in Feldn.

$\int dt \vec{a} = \int \frac{q}{m} \vec{E} dt$

$\vec{v} = \frac{q}{m} \vec{E} t + v_0$

// s_0 & $v_0 = \emptyset$

$\vec{s} = \frac{q \vec{E}}{2} t^2 + v_0 t + s_0$

// f. $t^2 \left(\frac{L}{v}\right)^2$ eins.

B - Feld

$$m \vec{a} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

Kreisbahn



$$r = \frac{q}{m} R B$$

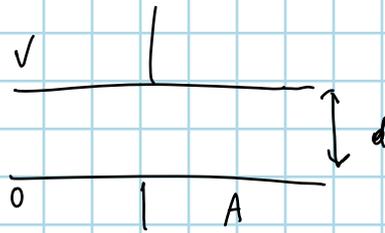
$$s = \frac{q E}{2m} \left(\frac{L}{r} \right)^2 = \frac{q E}{2m} \left(\frac{L}{\frac{q}{m} R B} \right)^2$$

$$= \frac{q E}{2m} \left(\frac{L^2 m^2}{R^2 B^2 q^2} \right)$$

$$s = \frac{E}{L} \frac{L^2}{R^2 B^2} \frac{m}{q}$$

$$\frac{E L^2}{2 R^2 B^2 s} = \frac{q}{m} \checkmark$$

$$E = \frac{V A}{d}$$

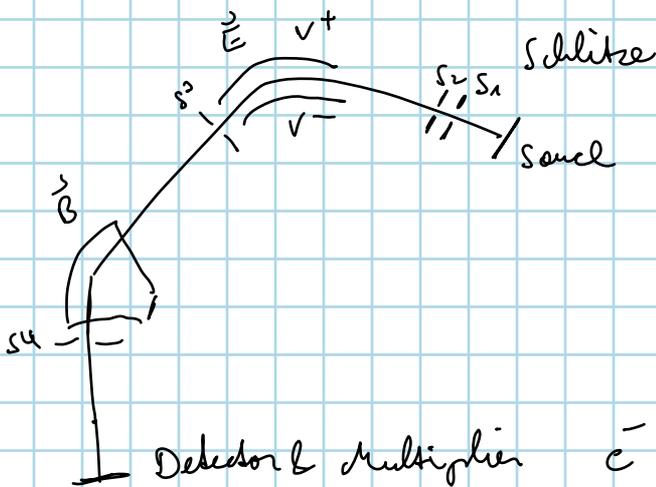


$$E = \frac{Q}{A} = \frac{C U}{A} = \frac{A}{d} \frac{U}{A}$$

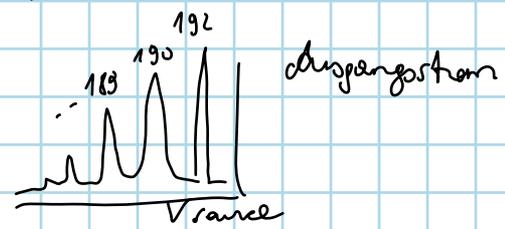
$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{q_1}{m_1}}{\frac{q_2}{m_2}} = \frac{q_1 m_2}{q_2 m_1}$$

Abgleichsforschierend: alle T gleiches $\frac{q}{m}$ werden

auf gleichen Punkt fokussiert, egal welches E / Richtung



$$\frac{\Delta m}{m} = 10^{-8}$$



Detektor & Multiplier e^- Multiplier

Messungen: e^- , P , D zu ^{12}C

$$\frac{m_d}{m_p} = \frac{2 m_d}{2 m_p + m_e - m_e} = 2 m_d \left(\frac{1}{2 m_p + m_e - m_e} \right) =$$

$$= 2 m_d \left(\frac{1}{(2 m_p + m_e) \left(1 - \frac{m_e}{2 m_p + m_e} \right)} \right) = 2 \left(\frac{m_d}{2 m_p + m_e} \right) \left[1 - \frac{m_e}{2 m_p + m_e} \right]^{-1}$$

H_2^+

$$\frac{m_p}{m_p} \left(\frac{m_e/m_p}{2 + m_e/m_p} \right)$$

D zu H_2^+ bestimmen für $\frac{m_d}{m_p}$

Wird gut & kurzweilige!

$\frac{C^{2+}}{^2H_3}$ für $\frac{m_d}{m_p}$

Ionen messen um Masse von neutralen T zu bestimmen (oder wenn die so nicht vorhanden)

Ionen im Magnetfeld: Rotationsperiod. messen

$$v = \frac{q}{m} R B \quad T = \frac{s}{v} = \frac{2\pi R}{\frac{q}{m} R B} \checkmark$$

Verh. Umlaufz. \rightarrow Verh. Massen

Ionenfallen

Diff d kleinsten & größten Masse $0,38\%$

Zyklotronfreq.

$$\omega_c = \frac{q}{m} B$$

Penning Falle



Statisch, inhomogen

$$\phi(r, z) = \frac{U_0}{d^2} (r^2 - 2z^2)$$

Rotationsymmetrie um z -Achse (nur r) \rightarrow Rotationsbew.

Überlagerung von mehreren Frequenzen (keine reine Zyklotronbew.)

$$\omega_z = \sqrt{\frac{e_0 V_0}{m d^2}}$$

$$\omega_c' = \frac{1}{2} (\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 - \omega_z^2})$$

$$\omega_c'' = \frac{1}{2} (\omega_c - \sqrt{\omega_c^2 - \omega_z^2})$$

Treiben von Eigenfreq. d. Dipolfelder \rightarrow Energieaufnahme

Ionen aus Falle — Flugzeit messen zum Detektor

$$t_{\text{min}} \rightarrow \omega_c$$

Paul-Falle: (kein B-Feld?)

Wechselfeld $V(t) = V_0 + V_0(t) \cos(\Omega t)$

harmon. Oszill. in radialer & axialer Richtg mit Ω moduliert

Fallen messen auch g , Laserspektroskopie an Einzelatomen

Quantenoptik ...

3200 Kuhlide vermessen

Sensitivität: Technik, Bindungsenergie d. e^- (Külle)

$$1-2 \text{ eV}$$

innere Schalen schwerer Elem: $10-20 \text{ eV}$

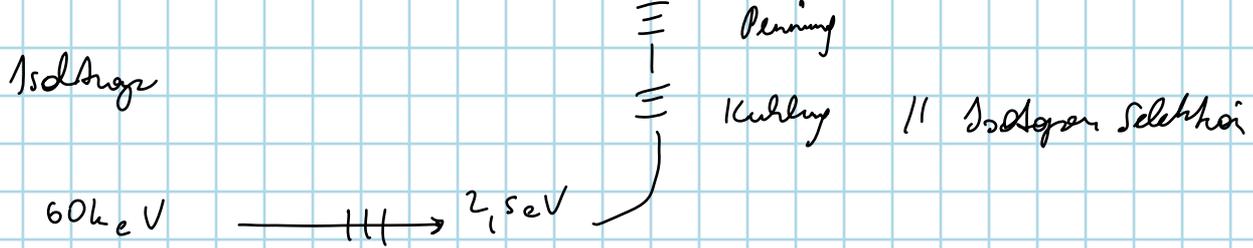
$$\frac{\Delta m}{m} = 10^{-11}$$

radioaktiv: $10^{-5} - 10^{-8}$

Penning: Anregung mit Eigenfrequenz: Energieerwerb \rightarrow Flugzeit

minimiert

Flugzeit messen (min) \rightarrow Eigenfreq $\rightarrow \frac{q}{m}$



$$\frac{dW}{\omega} \sim 10^{-8}$$

Kinematik v. Kernreaktionen

Furzt auch bei kurzlebigen Lebensd $\sim 1 \text{ min}$

$\beta \rightarrow \beta T$ Bereich m_0 ?

Masse aus \vec{q} Wert bei Reaktionen (Impulsübertrag)

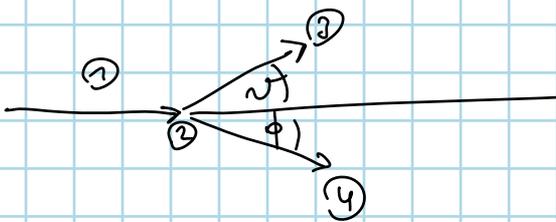
$A_1 + A_2 \rightarrow A_3 + A_4$ // jeweils $E_{\text{kin}} + E_{\text{ruhe}}$
 |
 ruht

Energieerhaltung $E_{g_2} = E_{g_0}$

Impulserh. komponentenweise

$$m_1 v_1 = m_3 v_3 \cos \vartheta + m_4 v_4 \cos \phi$$

$$0 = m_2 v \sin \vartheta - \dots \sin \phi$$



m_1, m_2, m_3 & v_1 bekannt

v_3 & ϑ messen

$\rightarrow v_4, m_4$ & ϕ berechnen

Nicht so genau wie Fallen & Sphärometer

Kernart nur über Kernrech. bestimmbar

$n + p \rightarrow {}^2\text{H} + \gamma$ (Einfang) $\rightarrow n$ bestimmen

Vernachl. v. Kernischen / langsamen $v: E_{kin} \ll m_0 c^2$

\Rightarrow Bindungsenergie von ^2H durch E_γ gegeben

$$B(2,1) = E_\gamma \left(1 + \frac{E_\gamma}{2m_d c^2} \right) \quad // \text{ mit R\u00fccksicht auf Deuterons}$$

$$m_n c^2 = m_d c^2 - m_p c^2 + E_\gamma \left(1 + \frac{E_\gamma}{2m_d c^2} \right)$$

Wellenl\u00e4nge: schwarz-stabil

$$E_\gamma = \frac{2\pi \hbar c}{\lambda_\gamma} \quad // \begin{cases} c = \lambda \nu \\ E_\gamma = h \nu \end{cases}$$

m_n bestimmen mit $L_p, \hbar c, R_\infty$

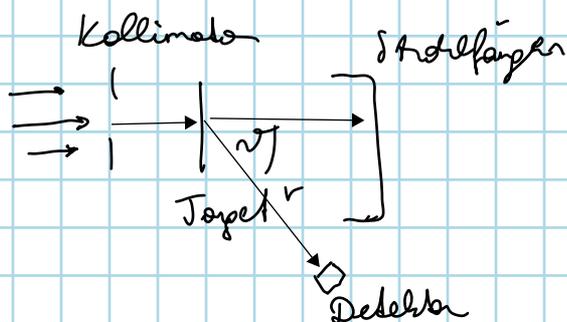
Aus H-Spektrum & ω_c von e^-

$\hbar c$: aus \u00dcbergangswellenl\u00e4ngen

L_p : Vergleich d. Zyklotronf. ...

2.4 Streuexperimente

Fixtargetexperiment



nichtstreuender Teil geht gerade

nA : Anzahl d. Streuzentren

$$= \frac{\text{Dicke}}{g} \cdot d \cdot A$$

|
Dicke

$$\frac{\text{Streuungen}}{\text{Zeiteinh.}} = nA \cdot \sigma_j$$

Wirkungsquerschnitt / incoming Strahlendichte

σ : Maß f. Streuendurch am Targetkern

$$\sigma = \frac{\text{Streuungen} / (\text{Streuer} \& \text{Zeit})}{j_i}$$

Rechteck Fläche F : Teil d. Raumwinkels

$$d\Omega = \frac{dF}{r^2}$$

Diff Wirkungsquerschn.

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\vartheta, \varphi) = \frac{\text{Zahl d. nach } d\Omega \text{ gest. T / Zeit}}{j_i}$$

φ von Target & Projektil statistisch vert. $\rightarrow \phi$ unabh.
(unpolarisierte St.) |
Polarwinkel

$$\int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma \quad // \text{ integrierter Wirkungsquerschn.}$$

$$\frac{d\sigma(\vartheta)}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \vartheta} \left| \frac{db}{d\vartheta} \right|$$

Stoßparameter

$$b = R \cos(\vartheta/2) \quad // \text{ Streuung Punkt. an harter Kugel mit Rad. } R$$

$$\frac{R \cos \vartheta/2}{\sin \vartheta} \left(R \sin \frac{\vartheta}{2} \right) \frac{1}{2} = \frac{R^2}{4} \frac{\overbrace{\cos \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\vartheta}{2}}^{\sin \vartheta}}{\sin \vartheta} = \underline{\underline{\frac{R^2}{4}}}$$

$$\int \frac{R^2}{4} d\Omega = 4\pi \frac{R^2}{4} = R^2 \pi \checkmark = \sigma_{\text{tot}}$$

Querschnittsfl. einer harten Kugel

$$1 \text{ barn} = 1 b = 10^{-28} \text{ m}^2$$

elastische Streuung: keine Anregungsenergie auf Target
andere: unelastisch

inelastisch: Anregung eines od. beider Stoßpartner

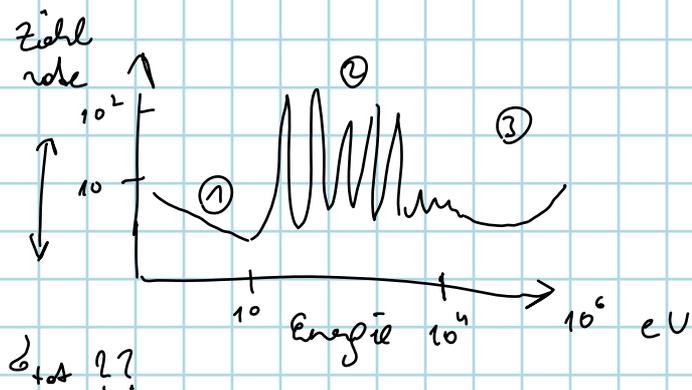
Kern-Kernstreuung stark Energieabhängig

n-Kernst: 3 Bereiche

1) $\frac{1}{v}$ Verhalten bei $E \ll$

2) Resonanzbereich bis $> \text{keV}$

3) Potentialstreb. f. $E > \text{einige keV}$



Anteil konst σ_{tot} in ② $\sim 10^6$ Kugel $R \sim 10 \text{ fm}$

\rightarrow übersteigt iontliche Größe, jedoch kinetisch auf große schweren Kerne

Zählrohre f. Anlage abschätzen mit Luminosität L

$$N = L \cdot \sigma \rightarrow \text{unabh. v. Target}$$

feststehendes Target: $L = j A n = I n$

gegenlaufende Str.

$$L = \frac{N}{A} v n_1 n_2$$

— Anzahl Partikel
|
Umlauffreq.

n_1 : Zahl d. T in Paket (Paket)

Überlappung d. Strahlen in der WW-Zone

Streuungstheorie

nichtrel. QM & reguläre Lsg. d. SGL

$$H\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \quad \text{mit reduzierter Masse}$$

Lsg: einlaufende ebene & auslaufende Kugelwelle

$$\psi^{(+)}(\vec{k}, \vec{r}) = A \left[e^{i\vec{k}\vec{r}} + \frac{f(\theta, k)}{r} e^{ikr} \right]$$

↓
Streulösung

/
Streuamplitude

$$k = \sqrt{\frac{2\mu E}{\hbar^2}} \quad \parallel \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} = E$$

$\frac{d\sigma}{d\Omega}$ bestimmen ... aus $\psi^{(+)}$

$$j_e = A^2 v_e$$

|
Amplituden - Quadrat

A: Querschnittf. Target /
Strahl

$$j_a = \frac{A^2}{r^2} |f(\theta)|^2 v_a$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{j_a \frac{dF}{d\Omega}}{j_e} = \frac{\frac{A^2}{r^2} |f(\theta)|^2 v_a \frac{dF}{d\Omega}}{A^2 v_e}$$

$$d\Omega = \frac{dF}{r^2}$$

$$= \frac{v_a}{v_e} |f(\theta)|^2$$

elastisch: $v_a = v_e \rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 \checkmark$

Zusammenhang $f(\theta)$ & $V(r)$

Umformung d. SGL

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(r)\right) \psi^{\pm} = E \psi^{\pm} \quad \left\| \cdot -\frac{2m}{\hbar^2}\right.$$

$$\left(\Delta + \underbrace{\frac{E 2m}{\hbar^2}}_{k^2}\right) \psi^{\pm} = \underbrace{\frac{V(r) 2m}{\hbar^2}}_{U(r)} \psi^{\pm}$$

Lösung mit Green Fkt.

$$[\Delta + k^2] G_0^{\pm}(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad \begin{array}{l} (+) : \text{auslaufend} \\ (-) : \text{einlaufend} \end{array}$$

homogene Green Fkt. $U(r) = 0$

$$\psi^{\pm}(\vec{r}) = \phi(\vec{r}) + \int d^3 r' G^{\pm}(\vec{r}, \vec{r}') \underbrace{U(r') \psi^{\pm}(\vec{r}')}_{\text{Inhomog.}}$$

Lippmann-Schwinger-Gleichung

ϕ : Lsg d. homogenen Gl.

Annahmen: Kugelsymm. V
 // elastische Str.

ϕ : durch V ebene Welle: $\phi = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}} e^{i\vec{k}\vec{r}}$

G_0 Fourier Transform: $G_0^{\pm} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 q e^{i\vec{q}(\vec{r}-\vec{r}')} \underbrace{g_0^{\pm}(\vec{q})}_{\text{norm. } h}$

$$(\Delta + k^2) G_0^{\pm} = \delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

Fourier Transform

Fourier darst. einstellen ...

δ -Fkt Fourier Transform

$$(\Delta + k^2) \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 q e^{i\vec{q}(\vec{r}-\vec{r}')} g_0^{\pm}(\vec{q}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 q e^{i\vec{q}(\vec{r}-\vec{r}')} \underbrace{\delta(\vec{r}-\vec{r}')}_{\text{Fourier Transform}}$$

$$\rightarrow (k^2 - q^2) \dots = \dots$$

$$(k^2 - q^2) g_0 = 1$$

$$g_0 = \frac{1}{k^2 - q^2 \pm \epsilon}$$

Umgehung d. Polstelle

$\epsilon \rightarrow \pm$ Verschiebung d. Pole inf. klein

Rückhilfe: $G_0^{\pm}(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{\pm ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$

Einsetzen in Lippm. Schw. gl.

$$\rightarrow \psi_{\vec{k}, \vec{r}}^{\pm} = \phi(\vec{r}) - \frac{1}{4\pi} \int d^3r' \frac{e^{\pm ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} U(r') \psi_{\vec{k}, \vec{r}'}^{\pm}$$

Entwicklung $k|\vec{r}-\vec{r}'| = kr - \vec{k}' \cdot \vec{r}' + \dots$

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \dots \quad \vec{k}' = k \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\rightarrow \psi_{\vec{k}, \vec{r}}^{\pm} = \phi - \frac{1}{4\pi r} e^{ikr} \int d^3r' e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{r}'} U(r') \psi_{\vec{k}, \vec{r}'}^{\pm}$$

Vergleich mit $\psi^{\pm} = A \left[e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} + \frac{f}{r} e^{ikr} \right]$

$$U(r) = \frac{2m}{\hbar^2} V(r)$$

$$\Rightarrow f(\vec{k}, \vec{k}') = -\frac{1}{4\pi} \int d^3r' e^{-i\vec{k}' \cdot \vec{r}'} U(r') \psi^+(\vec{k}, \vec{r}')$$

$$= -\frac{2m}{\hbar^2 4\pi} \int \dots V(r') \psi^+(\vec{k}, \vec{r}')$$

$$\langle \phi(\vec{k}') | \hat{V} | \psi^+(\vec{k}) \rangle$$

$$\langle \phi(\vec{k}') | \hat{V} | \psi^+(\vec{k}) \rangle = \langle \phi(\vec{k}') | \hat{T} | \phi(\vec{k}) \rangle = T$$

Streumatrix $\hat{S} = 1 - 2\pi i \hat{T}$

T-Matrix

Übergang bei einer best. E
 Gesamtw. zw. einl. & ausl. freien Zust.

Bornsche Näherung:

$$f = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3r' e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}'} V(r') \psi^+(\vec{k}, \vec{r}')$$

$$\begin{aligned} \psi^+(\vec{r}) &= \phi(\vec{r}) + \int d^3r' G_0^{\pm} U \psi^{\pm} \\ &= e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} - \frac{2m}{4\pi\hbar^2} \int d^3r' \frac{e^{i\hbar|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} V(r') \psi^{\pm}(\vec{r}') \end{aligned}$$

|| wir einsetzen !!

$$\begin{aligned} \Rightarrow f &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3r' e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}'} V(r') e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}'} \\ &+ \left(-\frac{m}{2\pi\hbar^2}\right)^2 \int d^3r \int d^3r' e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} V(r) \frac{e^{i\hbar|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} V(r') e^{-i\vec{k}'\cdot\vec{r}'} \end{aligned}$$

|| schon 2x ψ_0 eingesetzt

habe. f kleines V & große E

1. Ordnung Näherung:

$$f = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int d^3r' e^{-i\frac{(\vec{k}' - \vec{k})\cdot\vec{r}'}{\hbar}} V(r')$$

$$\vec{q} = \hbar(\vec{k} - \vec{k}')$$

≈ Fourier Transform von V

Rutherford Streuung

Potential mit $\frac{1}{r} \rightarrow$ bei $r \rightarrow \infty$ keine freie Lsg wegen langsamer Abfall

$$V_c = \frac{Z_1 Z_2 \cdot 4\pi \epsilon_0 \hbar^2 c}{r}$$

Umgebung: abgeschirmtes Poti

$$V_{scr.} = V_c e^{-\frac{r}{r_0}} \quad r_0: \text{Ausdehnung } e^- \text{-Hülle}$$

$$\text{Fourier: } \tilde{V}_{scr}(\mathbf{q}) = 4\pi \frac{Z_1 Z_2 \cdot 4\pi \epsilon_0 \hbar^2 c}{\left(\frac{q}{\hbar}\right)^2 + \frac{1}{r_0^2}}$$

$$r_0 \rightarrow \infty$$

$$\tilde{V}_c = 4\pi \frac{Z_1 Z_2 \cdot 4\pi \epsilon_0 \hbar^2 c}{\left(\frac{q}{\hbar}\right)^2}$$

$$f = -\frac{m}{2\pi \hbar^2} \int d^3 r' e^{-i \frac{\mathbf{s}}{\hbar} \cdot \mathbf{r}'} V(r') e^{i \frac{\mathbf{s}'}{\hbar} \cdot \mathbf{r}'}$$

$$= -\frac{m}{2\pi \hbar^2} \underbrace{4\pi Z_1 Z_2 \cdot 4\pi \epsilon_0 \hbar^2 c \cdot \int d^3 r' e^{-i \frac{\mathbf{s}}{\hbar} \cdot \mathbf{r}'} e^{i \frac{\mathbf{s}'}{\hbar} \cdot \mathbf{r}'}}_{\frac{1}{q^2} e^{-r}}$$

$$= -2m Z_1 Z_2 \cdot 4\pi \epsilon_0 \hbar^2 c \cdot \int \frac{1}{q^2}$$

$$f = -\frac{2m c^2 Z_1 Z_2 \cdot 4\pi \epsilon_0 \hbar^2 c}{q^2 c^2} \quad \vec{q} = \hbar(\vec{k} - \vec{k}')$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f|^2$$

$$\int d^3 r' e^{i \frac{\mathbf{q}}{\hbar} \cdot \mathbf{r}'} \frac{1}{q^2}$$

$$q = 2p \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad \& \quad E = \frac{p^2}{2m} \text{ einsetzen}$$

$$\rightarrow \text{Flt von } \frac{1}{E^2} \quad \& \quad \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Ladungs & Materieverteilung

Info aus elast. e^- -Kernstreuung & Analyse
von Spektren myonischer Atome

e^- -Kernstreuung: Kern als ausgedehntes Objekt

$$\vec{F} = \vec{r} + \vec{s} \quad \text{--- } e^- \text{ zu Ladungssphäre}$$

|
Kernsp zu Ladungssphäre

e^- zu Kernsp

$$V(\vec{r}) = -\int d^3 r' \frac{Z k_f k c}{s} \rho(r')$$

$$\rightarrow \text{Streuung } f = -\frac{m}{2\pi \hbar^2} Z k_f k c \int d^3 r' \int d^3 r \frac{\rho(r)}{s} e^{i\vec{q}(\vec{r} + \vec{s})/\hbar}$$

Trape in \int über s & r :

$$c \cdot \underbrace{\int d^3 s \frac{1}{s} e^{i\vec{q}\vec{s}/\hbar}}_{\text{Poisson}} \underbrace{\int d^3 r \rho(r) e^{i\vec{q}\vec{r}/\hbar}}_{\text{Fourier } F(\vec{q})} \quad \checkmark$$

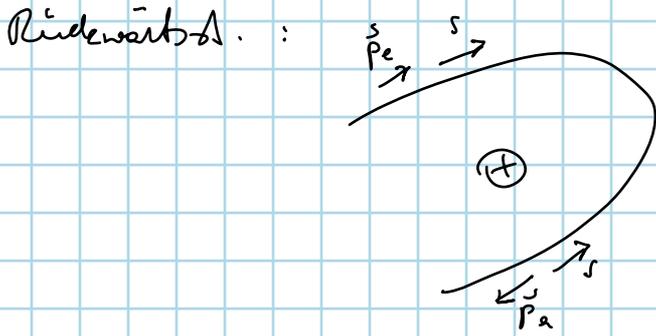
Über Winkelwert f :

$$F(\vec{q}) = 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \rho(r) \frac{\sin(qr/\hbar)}{qr/\hbar}$$

Spin berücksichtigen

Helizität bleibt erhalten

$$\frac{\vec{p} \cdot \vec{s}}{|\vec{p} \cdot \vec{s}|}$$



Drehimpuls \vec{J} erhalten = $\vec{L} + \vec{s}$

s schaut in z -Richtung
(als einziges) \rightarrow bleibt

erhalten

Dies würde jedoch Heliz. ändern

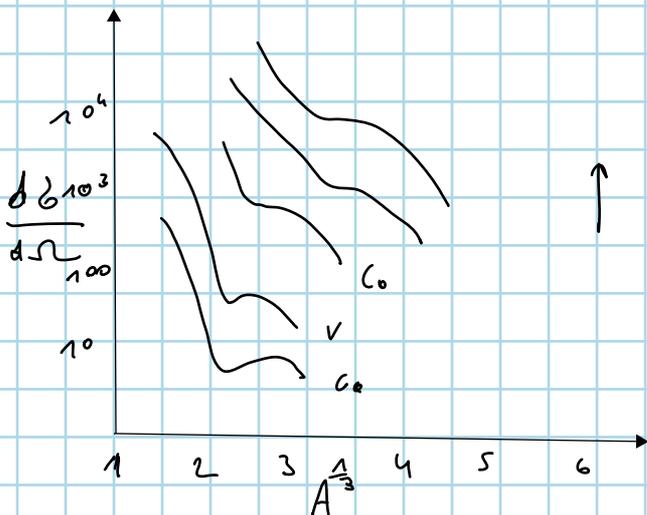
\rightarrow keine Rückwärtsstr. \rightarrow neuer Faktor $\beta = 1$

$$\frac{d\sigma_n}{d\Omega} = \frac{d\sigma_n}{d\Omega} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

allgem: $\downarrow \frac{d\sigma_n}{d\Omega} (1 - \beta \sin^2 \frac{\theta}{2})$

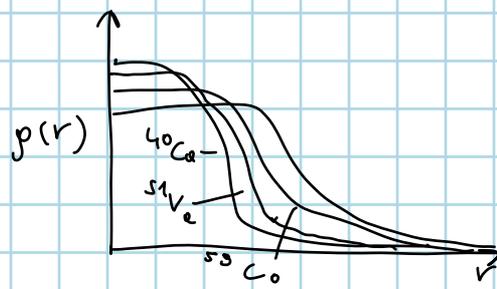
ausgedrückt: $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma_n}{d\Omega} F^L(\theta)$

Ladungsverteilung d. Kerne



Wirkungsqu. nimmt zu,
Maximal/min weniger
stark

! schon wie d. Radius?



Fermi Verteilung f. Ladungsdichte

$$\rho(r) = \rho_0 \left(\frac{1}{1 + e^{(r - R_{112})/a}} \right)$$

|
Halbdickenerod.

Statt R_{112} $R_m^2 = \langle r^2 \rangle = 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \rho(r) r^2$
// quadr. gem. Rad

Gute Näherung: konst. zentrale Dichte & Oberflächenschicht
|
0,9 - 0,1 ρ .

Dicke des Rands $\sim 2,4 \text{ fm}$ (fest A unabh.)

Leichte Kerne: fast nur Rand \rightarrow besser für β Vert

param. ρ nötig, damit man fehlende Phase von $F(q)$
kompensiert (Man misst F^2)

wenige Parameter \rightarrow einfache Optimierung, aber Vorurteil in Analyse

\Rightarrow Analyse unabhängig von Form machen

\rightarrow Fourier Bessel Reihe

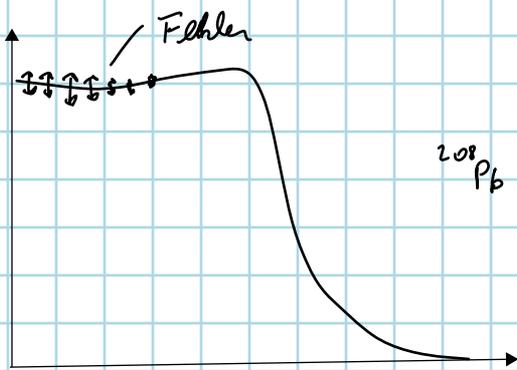
$$\rho(r) = \sum_r a_r \frac{\sin(q_r r / k)}{q_r r / k}$$

$$\rho(r > R) = 0 \quad \rightarrow \quad F(q) = 4\pi \int_0^R dr r^2 \frac{\sin(q r / k)}{q r / k}$$

$$a_r = \frac{2}{R^3} \frac{1}{j_1^2(q_r R / k)} F(q_r)$$

|
Bessel Fkt 1. Ordng.

Große Wirkung, bei kleinen q & fallen über mehrere Größenordn
bei wach q , \rightarrow großen Fehler bei großem q



2.6 EM-Momente

Durch Deformation d. Ladungsvert. Dadurch WW mit e^- Kille

$$(HFS) \quad p^\mu \rightarrow p^\mu - q A^\mu \quad \left| \begin{array}{l} \partial^\mu = (\frac{1}{c} \partial_t, -\vec{\nabla}) \\ \partial_\mu = (\frac{1}{c} \partial_t, +\vec{\nabla}) \end{array} \right.$$

$$\left(\frac{\phi}{c}, \vec{A} \right)$$

Dirac-Gl.: $(i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu - mc) \psi = 0$ Volumen

$$\gamma^\mu = (\beta, \beta \vec{\alpha})$$

$$(i\hbar \beta \frac{1}{c} \partial_t + i\hbar \beta \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} - mc) \psi = 0 \quad | \cdot \beta$$

$$i\hbar \partial_t \psi = (-ic \hbar \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta mc^2) \psi$$

$$(+c \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc^2) \psi$$

$$\alpha^2 = \underline{\underline{1}}$$

$$f = e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t}$$

$$\vec{p} = \hbar \vec{k}$$

$$\vec{\nabla} f = i\hbar \vec{k} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t}$$

$$\rightarrow \vec{p} = -i\hbar \vec{\nabla}$$

$$\rightarrow \text{Dirac} \quad (c \vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc^2) \psi = i\hbar \partial_t \psi$$

$$\partial^\mu \rightarrow \partial^\mu - q A^\mu$$

$$\rightarrow (i\hbar \gamma^\mu (\partial_\mu - q A_\mu) - mc) \psi = 0$$

$$[c \vec{\alpha} \vec{p} + \beta m c^2 + q \phi - c q \vec{\alpha} \vec{A}] \psi = i \hbar \partial_t \psi$$

Ziel f. ψ_A & ψ_B

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$$

$$c(\vec{\alpha} \vec{p} - q \vec{\alpha} \vec{A}) \psi_B = (E - m c^2 - q \phi) \psi_A$$

$$\psi_A = (E + m c^2 - q \phi) \psi_B$$

$$\psi_B = \frac{c(\vec{\alpha} \vec{p} - q \vec{\alpha} \vec{A})}{E + m c^2 - q \phi} \psi_A$$

$$\Rightarrow c^2(\vec{\alpha} \vec{p} - q \vec{\alpha} \vec{A}) \frac{(\vec{\alpha} \vec{p} - q \vec{\alpha} \vec{A})}{E + m c^2 - q \phi} \psi_A = (E - m c^2 - q \phi) \psi_A$$

$$E + m c^2 - q \phi = E - m c^2 - q \phi + 2 m c^2 = 2 m c^2 \left(1 + \frac{E - m c^2 - q \phi}{2 m c^2} \right)$$

$$H_{\text{class}} = q \phi$$

$$\rightarrow \frac{1}{2m} (\vec{\alpha} \vec{p} - q \vec{\alpha} \vec{A}) \left(1 + \frac{E - m c^2 - q \phi}{2 m c^2} \right) (\vec{\alpha} \vec{p} - q \vec{\alpha} \vec{A}) \psi_A = (E - m c^2 - q \phi) \psi_A$$

Terme wo \vec{A} drin ist,

$$H_{\text{mag}} = -\frac{q}{2m} \left((\vec{\alpha} \vec{p})(\vec{\alpha} \vec{A}) + (\vec{\alpha} \vec{A})(\vec{\alpha} \vec{p}) \right) + \underbrace{\frac{q^2}{2m} (\vec{\alpha} \vec{A})(\vec{\alpha} \vec{A})}_{\text{diagonal Term, bei starkem H}}$$

$$(\vec{\alpha} \vec{A})(\vec{\alpha} \vec{B}) = (\vec{A} \vec{B}) + i \vec{\alpha} (\vec{A} \times \vec{B})$$

// nur 1. Term

$$\rightarrow H_{\text{mag}} = -\frac{q}{2m} \left((\vec{p} \cdot \vec{A}) + (\vec{A} \cdot \vec{p}) \right) + i \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} \times \vec{A} + \vec{A} \times \vec{p})$$

$$\partial_i A_i \psi + A_i \partial_i \psi = \psi \underbrace{\partial_i A_i}_{\emptyset} + A_i \partial_i \psi + A_i \partial_i \psi = 2 A_i \partial_i \psi$$

$$1.T: -\frac{q}{2m} 2 \vec{A} \cdot \vec{p}$$

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{B}$$

$$-\frac{q}{m} \frac{1}{2} (\vec{r} \times \vec{B}) \cdot \vec{p} \approx -\frac{q}{2m} (\vec{r} \times \vec{p}) \cdot \vec{B} \quad ??$$

$$\Rightarrow 1.T \sim H_L$$

$$2.T: i \vec{\sigma} \cdot \left(\vec{p} \times (\vec{r} \times \vec{B}) + (\vec{r} \times \vec{B}) \times \vec{p} \right)$$

$$(\vec{p} \cdot \vec{B}) \vec{r} - (\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{B} + (\vec{r} \cdot \vec{p}) \vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{p}) \vec{r}$$

$$= \partial_i B_i r_k - \partial_i r_i B_k + r_i \partial_i B_k - B_i \underbrace{\partial_i r_k}_{\delta_{ik}}$$

$$= \underbrace{B_k \partial_i r_k}_{B_k} + r_k \underbrace{\partial_i B_i}_{\emptyset} - r_i \partial_i B_k - \underbrace{B_k \partial_i r_i}_{-3B_k}$$

$$+ r_i \partial_i B_k - B_k$$

$$= \cancel{B_k} - r_i \cancel{\partial_i B_k} + r_i \cancel{\partial_i B_k} - \cancel{B_k} - 3B_k$$

$$= -3B_k$$

$$\rightarrow -3i \vec{\sigma} \cdot \vec{B}$$

// irgendein VL-Feld?

$$\rightarrow H_{\text{mag}} = H_L + H_C$$

Vielteilchen $\hat{\rho}_e(\vec{r}) = q \sum_{i=1}^Z \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$

$$\rho_0(\vec{r}) = \iint_{\dots} \psi^*(r \dots) \hat{\rho}_e(\vec{r}) \psi(r \dots)$$

$$\vec{j}_e = \frac{q}{2m} \sum_{i=1}^Z \vec{p}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) + \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \vec{p}_i$$

$$\hat{H}_e = - \sum_{i=1}^Z \frac{q}{2m} [\vec{p}_i \cdot \vec{A}_i + \vec{A}_i \cdot \vec{p}_i]$$

$$\rightarrow \hat{H}_e = - \int d^3r \underbrace{\vec{j}_e \cdot \vec{A}(\vec{r})}_{\text{stationär}} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_e = 0$$

$$\begin{aligned} \vec{j}_e &= \vec{\nabla} \times \vec{\mu}_e & (\vec{\nabla} \times \vec{\mu}) \cdot \vec{A} &= \epsilon_{ijk} (\partial_j \mu_k) A_i \\ & & &= \epsilon_{ijk} \underbrace{\partial_j (\mu_k A_i)}_{\neq} - \epsilon_{ijk} \mu_k \partial_j A_i \\ & & &= + \mu_k B_k \quad \checkmark \end{aligned}$$

// ϵ Indizes ändern

$$H_s = - \int d^3r \vec{\mu}_s \cdot \vec{B}_s$$

$$\text{mit } \vec{\mu}_s = \frac{1}{\hbar} \sum_{i=1}^A g_s \mu_N \vec{s}_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$$

Magn. Multipolmomente // eigensch. v. Kernen d. Multipolmomente charakterisieren

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = 0 \quad \text{// nur conservative Felder}$$

$$\rightarrow \vec{B} = - \vec{\nabla} \phi_M$$

$$\text{aus } \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\Delta \phi_M = 0$$

\mathcal{S}_e : Im Ursprung reguläre Lösungen

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{l,m} (-1)^m \phi_{l-m} r^l Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

! abh. von Feldstärke & abh. am Ursprung

Energie des Kerns im Zust $\langle IM |$ im \vec{B} Feld (äußeres)

$$E_{\text{Magn}}(IM) = \langle IM | \hat{H}_{\text{Magn}} | IM \rangle = \sum_{l,m} (-1)^m \phi_{l-m} M_{lm}(IM)$$

$$M_{em}(IM) = \langle IM | \int d^3r \overset{\circ}{\mu}(\vec{r}) [\overset{\circ}{v} r^l \psi_{em}(\vartheta, \varphi)] | IM \rangle$$

/

$\vec{\mu}_s + \vec{\mu}_e$

$\vec{\mu}$ durch \vec{l} & \vec{s} ausdrücken

$$j_i = \epsilon_{ijk} \partial_j \mu_k$$

$$\epsilon_{emi} r_m j_i = \epsilon_{emi} \epsilon_{ijk} r_m \partial_j \mu_k$$

$$\underbrace{\partial_j r_m \mu_k}_{\text{fällt weg}} - \mu_k \underbrace{\partial_j r_m}_{\delta_{jm}}$$

$$\epsilon_{emi} \epsilon_{ijk} \mu_k \delta_{jm} = (\delta_{ej} \delta_{mk} - \delta_{ek} \delta_{mj}) \mu_k \delta_{jm}$$

$$\mu_m \delta_{em} - \mu_e 3 = -2\mu_e$$

$\vec{r} \times \vec{j}_e \approx \vec{j}_e$ nun mit \vec{l} statt \vec{p}

$$\downarrow \frac{q}{2m} \sum_i \vec{l}_i \delta + \delta \vec{l}_i$$

$$\epsilon_{ijk} r_j \partial_k \partial_i \sim \vec{r} (\overset{\circ}{v} \times \overset{\circ}{v}) = 0$$

Beide T selber Beiträge \rightarrow $\cancel{2em}$

$$\mu_N = \frac{e_0 \hbar}{2m_p}$$

$$M_{em}(IM) = \langle IM | \int d^3r \overset{\circ}{\mu}(\vec{r}) [\overset{\circ}{v} r^l \psi_{em}(\vartheta, \varphi)] | IM \rangle$$

$$= \langle | \int d^3r \frac{\vec{r} \times \vec{j}_e}{2+1} [\dots] | \rangle$$

$$\rightarrow M_{em} = \langle IM | \sum_{i=1}^A \left\{ \frac{2}{2+1} g_{ei} \frac{\hat{l}_i}{\hbar} + g_{si} \frac{\hat{s}_i}{\hbar} \right\} \mu_N [\overset{\circ}{v} r^l \psi_{em}] | IM \rangle$$

$$\rightarrow E_{\mu} = - \langle M | \hat{\mu} | M \rangle B_z(\emptyset)$$

Term in Klammern $\{ \}$ von M_{10}

Dipolmoment μ ist Erwartungswert von $\hat{\mu}$, wenn Kernspin in z-Richtung:

$$\mu = \langle II | \hat{\mu} | II \rangle = g_I \mu_N I$$

symmetrischer Faktor d. Kerns // hängt von Kern \sqrt{I} ab!

\vec{I} nicht in z-Richtung \rightarrow über Wigner Eckart

$$\rightarrow M_{10}(IM) = \frac{M}{I} M_{10}(II) \quad \text{warum das?}$$

$$\rightarrow E_{\mu} = - \mu B_z(\emptyset) \frac{M}{I} = - g_I \mu_N M B_z$$

Dipolmomente ausrechnen in str. Kernmodell

Annahme: Im Grundz d. Kerns alle Nuk. zu Paaren n.

$I = \emptyset$ gekoppelt; \rightarrow wenn A ungerade, dann

$I \in \mu$ von letztem Nukleon bestimmt ($n, l, j = I$)

μ davon mit Richtungsvektor berechnen (aus Wign. Eck)

$$\langle j m | \hat{A} | j m' \rangle = \langle j m | \hat{j} | j m' \rangle \frac{\langle j j | \hat{A} | j j \rangle}{j(j+1)\hbar^2}$$

$$\mu = \langle l s j j | g_e \frac{\hbar^2}{\hbar} + g_s \frac{\hbar^2}{\hbar} | l s j j \rangle \mu_N =$$

$$\mu_N \langle l s j j | \hat{j} | l s j j \rangle \langle l s j j | \hat{l} \frac{g_e}{\hbar} + \hat{s} \frac{g_s}{\hbar} | l s j j \rangle \frac{1}{j(j+1)\hbar^2}$$

$$= \mu_N \cdot j \frac{1}{j(j+1)\hbar^2} < \dots ? \quad \parallel \hbar^2 \text{ kürzt sich mit}$$

$$l_j \parallel j^2 + l^2 - s^2$$

$$s_j \parallel j^2 + s^2 - l^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} l^2 + s^2 + 2ls = j^2 \\ j^2 - l^2 - s^2 = 2ls \end{array} \right.$$

$$(l+j)^2 = l^2 + j^2 + 2lj$$

$$(l+l+s)^2 = (2l+s)^2 = 4l^2 + 2ls + s^2$$

$$2lj = (l+j)^2 - l^2 - j^2$$

$$= 4l^2 + 4ls + s^2 - l^2 - j^2$$

$$= 4l^2 + 2j^2 - 2l^2 - 2s^2 + s^2 - l^2 - j^2$$

$$= l^2 + j^2 - s^2 \quad \checkmark$$

$$\frac{1}{j+1} \left(g_l \frac{j(j+1) + l(l+1) - s(s+1)}{2} + g_s \frac{j(j+1) + s(s+1) - l(l+1)}{2} \right)$$

$$(j+1) \left\{ \frac{g_l}{2} \left(j + \frac{l(l+1) - s(s+1)}{(j+1)} \right) + \frac{g_s}{2} \left(j + \frac{s(s+1) - l(l+1)}{(j+1)} \right) \right\}$$

$$\left\{ \frac{j}{2} (g_l + g_s) + \frac{l(l+1)}{2(j+1)} (g_l - g_s) - \frac{s(s+1)}{2(j+1)} (g_l - g_s) \right\}$$

✓

∥ für $s = \frac{1}{2}$ einsetzen

$$\rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{3}{4} \checkmark$$

$\mu(j) / \mu_N$ sind Schmidt Linien

Neutronen:



niedriger Kern

Protonen:



steigender Kern

Exp. Werte liegen zw. Linien mit $j = l \pm \frac{1}{2}$

Gute Übereinst. f. Kerne mit $1T$ od. Loch in letzter Schale

^{209}Bi ist nicht mag.

Ursachen: 1) Polarisation d. Kerne d. äuß. Felder \rightarrow mikroskopisch rechnen
2) Formfaktoren berücksichtigen

\rightarrow Eindeutenmodell passt gut für Dipolmoment
(nur 1 ungerade) \rightarrow keine kollektiven Effekte

Elektrische Multipolmomente

Momente Ordn. 2^l UW: $q\phi$; $\vec{p}\vec{E}$, $Q_{ij}\partial_i E_j$

$Q_{em} = \emptyset$ f. l ungerade $\rightarrow Q_{10} \neq \emptyset$: prädom. Anteil d. UW

$Q_{em} = \emptyset$ f. $l > 2$

Zustände mit $|\pi I \pi\rangle$ kennzeichnen f. axialsymm. Felder

E-Feld d. Multipolm. parametrisieren

ϕ in sph. Coord. entwickeln

Quellenfr. Feld $\rightarrow \Delta\phi = \emptyset$

(im Kern k. Q.) $\Rightarrow \phi(\vec{r}) = \sum_{em} (-1)^m \phi_{e-m} r^e Y_{em}$

Taylor v. ϕ : $\phi(\vec{r}) = \phi(\emptyset) + x_i \partial_i \phi(\emptyset) + \frac{1}{2} x_i x_j \partial_i \partial_j \phi(\emptyset)$

$\phi(\emptyset) \sim \phi_{00}$ $E_z(\emptyset) \sim \phi_{10}$

$\frac{\partial E_z}{\partial z}(\emptyset) \sim \phi_{20}$

$$E_{ee}(IM) = \sum_{em} (-1)^m \phi_{e-m} Q_{em}$$

$$Q_{em} = e_0 \langle IM | \sum_{i=1}^2 v_i^l \hat{Y}_{em} | IM \rangle$$

Symmetriebeispiel: $\pi Y_{em} \pi = (-1)^l Y_{em}$

$\rightarrow Q_{em} = (-1)^l Q_{em} \Rightarrow Q_{em} = \emptyset$ f. ungerades l

\rightarrow es gibt nur Q_{00} Q_{20} ...
 nungel. Q_{22} Q_{42} ...
 // Ladung

kein Dipol & Quadrupol. Dreibeinung: $0 \leq l \leq 2I$

andere sind $= \emptyset$! D.h. schon was I ist!

$Q_{00} \propto Z e_0$ M polare Q_2 f. axial symm. Felder

$Q_{em} = \emptyset$ f. $m \neq 0$

$\rightarrow E_d = \sum_{e < 2I} \phi_{e0} Q_{e0}$

Matrixelem: $\langle IM | \hat{Q}_{em} | I' m' \rangle = \frac{(-1)^{I'-m'}}{\sqrt{2l+1}} \langle I m' - m' | l m \rangle \cdot \langle I || \hat{Q}_l || I' \rangle$
 red. Matrixelem.

von Koord.system & Lage des Kerns unabh.

Elektr. Quadrupolmom.

Q_{eff} & Q_{sym} einführen, E_{ext} von Q mit $\partial_i E_j$ berechnen

$$Q_{20}(I, M) = \frac{(-1)^{l-m} \langle I M | -M | 20 \rangle}{\langle II | -I | 20 \rangle} Q_{20}(I, M=I)$$

$$= \frac{3M^2 - I(I+1)}{3I^2 - I(I+1)} Q_{20}(-^0-)$$

Q ist groß, wenn $M=I$

$$Q_{\text{spez.}} = \frac{1}{e_0} \sqrt{\frac{16\pi}{5}} Q_{20}(I, M=I)$$

$$\text{mit } \gamma_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \vartheta - 1)$$

$$\rightarrow Q_{\text{spez.}} = \langle II | \sum_{i=1}^Z (\beta z_i^2 - r_i^2) | II \rangle = Z(\beta \langle z^2 \rangle - \langle r^2 \rangle)$$

Mittel über
Dichteverteilung d. Protonen
im Kern

Dichteverd.: verl. Ellipsoid: Q positiv

abgeplattet

Q negativ

// Dimension einer
Fläche

Kern d. nicht nach z -schicht, dorthin röhren,

$$Q_{\text{eff}}(M) = \frac{3M^2 - I(I+1)}{3I^2 - I(I+1)} Q \quad // \text{Wegen Schicht röhre oben}$$

// kann auch neg. werden, wenn Q positiv ist!!

z.B. bei verhängtem Ellipsoid, wo $M=0$ ist

$$E_a = \phi_{20} Q_{20} - \frac{e_0}{4} \frac{\partial E_z}{\partial z} Q_{\text{eff}}$$

|
 ϕ_{20}

Q : Rückschluss auf Def. d. Kerns

kan. gel. Rotationsellipsoid: Ladung Ze

Halbachsen:
 $a = b, c$

$$Q = Z (3 \langle z^2 \rangle - \langle r^2 \rangle) = Z (2 \langle z^2 \rangle - \langle x^2 \rangle - \langle y^2 \rangle)$$

$$= \frac{2}{5} Z (c^2 - a^2)$$

kleine abw. v. Kugel: $R = \frac{c+a}{2}$ $\Delta R = c-a$

$$\rightarrow Q = \frac{4}{5} Z R^2 \underbrace{\frac{\Delta R}{R}}_S$$

- Deformationsparameter - an Q, Z, R^2 berechnen!

Kerne f. d. N od Z majoriert ist, passen gut zur sphärischen

Symmetrie, das sind Deformationen \rightarrow Schalenstruktur

Energieeigen durch Def. d. Kerne; kollektiven Effekt, alle

Nukleonen haben deformiertes Potential \rightarrow 1 einzelnes

Proton kann Eff. nicht erklären

eff Einbeitler: $Q_{ee} = \frac{1}{e_0} \sqrt{\frac{16\pi}{5}} \langle e_{s_{jj}} | \hat{Q}_{20} | e_{s_{jj}} \rangle =$

$$\sqrt{\frac{16\pi}{5}} \langle r^2 \rangle \langle e_{s_{jj}} | Y_{20} | e_{s_{jj}} \rangle$$

$$= - \langle r^2 \rangle \frac{2j-1}{2j+2}$$