

Zu S 68/69 (4.15) & (4.14)

$$\frac{h}{J} = \frac{(2m)^{3/2}}{3\pi^2 \hbar^3} E_F^{3/2} = \frac{3}{4\pi r_0^3}$$

$$\rightarrow E_F^{3/2} = \frac{3^2 \pi^2 \hbar^3}{r_0^3 (2m)^{3/2} 4} \quad | \wedge^{2/3}$$

$$\rightarrow E_F = \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\hbar}{r_0}\right)^2 \quad \checkmark$$

Kap 4 - Kernmodelle

Fermigasmodell

Würfel mit a Kantenlänge - p & n darin erfüllen SGL

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi = E \psi$$

Separation: $\psi = X(x) Y(y) Z(z)$

$$\rightarrow X(x) = b_x \sin(k_x x) + c_x \cos(k_x x)$$

$Y(y)$ & $Z(z)$ analog

mit $k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$

RB: $X(-\frac{a}{2}) = X(\frac{a}{2}) = 0$

$$\sin\left(\frac{k_x a}{2}\right) = 0 \rightarrow \frac{k_x a}{2} = n\pi$$

$$k_x = \frac{2n\pi}{a}$$

$$\cos(-k_x a/2) = 0 \rightarrow \frac{k_x a}{2} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$$

$$k_x = \frac{(2n+1)\pi}{a}$$

wenn $b=0$
 \rightarrow \cos bleibt

$$b \sin(-L) + c \cos(-L) = b \sin L + c \cos L$$

$$-b \sin L + c \cos L = b \sin L + c \cos L$$

$$2b \sin L = 0$$

entw. b od $\sin L$ sind 0

Eig müssen beide Terme = \emptyset sein d.h. 1 e Konstante

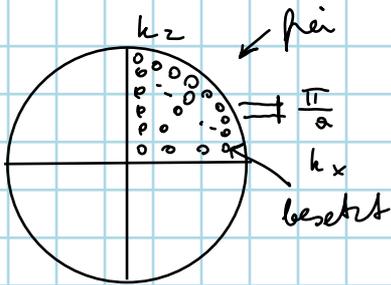
und 1 sin od. cos ...

$$\frac{\hbar^2}{2m} k_i^2 = E \quad k_i = \frac{n_i \pi}{a} \quad // \text{ allg f. sin \& cos}$$

$$\rightarrow E = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{a^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \quad \checkmark \quad n_i = 0, 1, 2, \dots$$

$$p^2 = 2mE$$

n_x, n_y, n_z sind zu $\hbar k_x, \hbar k_y, \dots$ proportional \rightarrow Punktgitter im Impulsraum ; Oktant, da $n = 0$ & pos Zahlen



sieht man im 3d Modell - unbesetzte Flächen werden nicht gezählt

Zahl d Gitterpunkte, die in $(g = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2})$ Kugelschale

$g + dg$ liegen

$$dn = \frac{1}{8} g^2 dg \int d\Omega = \frac{1}{2} \pi g^2 dg$$

$$p^2 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{a^2} g^2$$

$$\rightarrow dn = \frac{1}{2} \pi \frac{p^2 a^2}{\pi^2 \hbar^2} \frac{a}{\pi \hbar} dp$$

$$dp = \frac{\pi \hbar}{a} dg$$

$$= \frac{1}{2} \frac{a^3}{\pi^2 \hbar^3} p^2 dp$$

$$\rightarrow n = \int_0^{p_F} \frac{1}{2} \frac{a^3}{\pi^2 \hbar^3} p^2 dp = \frac{4\pi}{h^3} \int_0^{p_F} a^3 p^2 dp$$

Nukleonen : Anzahl $\cdot 2$ wegen $m_s = \pm \frac{1}{2}$

Kern hat Vol $J = \frac{4}{3} \pi a^3$

Mit E ausdrücken $n = \int_0^{E_F} \frac{1}{2} \frac{J}{\pi^2 \hbar^3} 2mE \cdot m (2mE)^{-\frac{1}{2}} dE$

$$p = \sqrt{2mE} = (2mE)^{\frac{1}{2}}$$

$$dp = \frac{1}{2} (2mE)^{-\frac{1}{2}} dE \cdot 2m$$

$$\begin{aligned}
 \rightarrow n &= \int_0^{E_F} \frac{1}{2} \frac{J}{\pi^2 \hbar^3} (2mE)^{\frac{1}{2}} m dE \\
 &= \int_0^{E_F} -\frac{1}{2} \sqrt{2m^3} E^{\frac{1}{2}} dE \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{E_F^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \frac{J}{\pi^2 \hbar^3} (2m^3)^{\frac{1}{2}} \frac{2}{3} E_F^{\frac{3}{2}} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{J}{\pi^2 \hbar^3} (2m)^{\frac{3}{2}} E_F^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{3} \quad \parallel \cdot 2 \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

\parallel Vergessen: Nukleonen, daher $\cdot 2$!

Annahme: $R = r_0 A^{\frac{1}{3}} \quad r_0 \approx 1,3 \text{ fm}$

$$J = \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{4\pi r_0^3}{3} A$$

$$\rightarrow \frac{A}{J} = \frac{3}{4\pi r_0^3} \quad \parallel \text{Nukleondichte}$$

aus $n = \frac{(2m)^{\frac{3}{2}}}{3\pi^2 \hbar^3} J E_F^{\frac{3}{2}} \quad \parallel \text{siehe S1 - ganz genau}$

$$E_F = \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\hbar}{r_0}\right)^2 \frac{1}{2m}$$

aus $J = \frac{4\pi r_0^3 A}{3} \quad | : Z$

$$\frac{J}{Z} = \frac{4\pi r_0^3}{3} \frac{A}{Z} \quad | \wedge -1$$

$$\rightarrow E_F = \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{Z}{A}\right)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{\hbar}{r_0}\right)^2 \frac{1}{2m} \quad \checkmark \quad \text{ähnlich für } n$$

m & r_0 einsetzen $\rightarrow E_F = 45 \text{ MeV}$

$$p_F = 290 \text{ MeV} / c$$

Bindungsenergie / N = 8 MeV

\rightarrow Potentialtiefe 53 MeV

Tropfen abhängig. \approx kurvenförmig d. KK & rel. konst d

Bindungs E / N

neilgehende Inkompressibilität ist ähnlich \nearrow Sättigung

der Dichte $\rho = \frac{A}{V} \rightarrow R = r_0 A^{1/3}$

$$B_{FG} = a_v A$$

↓
26 MeV

Würde gelten, wenn alle Nukl. gleiche Anz von Nachbarn hätten

Effektive: $B_v = a_v A$ Volumenterm aufg. d. Kernkraft

Oberflächenterm: $\propto F \rightarrow \propto R^2 \rightarrow \propto A^{2/3}$

$$B_F = -a_F A^{2/3}$$

// weniger NN Nachbarn an Oberfläche \rightarrow schwächer gebunden

a_F d. Oberflächenspannung gegeben $a_F = 4\pi r_0^2 \alpha$

Coulombsterm: Protonen stoßen sich ab \rightarrow Verringerung der Bindung

$$W_{\text{Coul}}(R) = \frac{3}{5} \frac{Z^2 e^2 \hbar c}{R} \quad ?!$$

$$V(R) = \frac{Z e^2 \hbar c}{R}$$

$$W = qV \text{ iergl. ...}$$

$$\rightarrow B_C = -a_C \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}}$$

$$a_C = \frac{3}{5} \frac{e^2 \hbar c}{r_0} \approx 0,66 \text{ MeV}$$

Asymmetrieterm: Unterschied zw. p & n berücksichtigen

\rightarrow Diff d. hin E zw. symm Kern & isobaren Kern anschauen

$$Z = N = \frac{A}{2} \quad N \neq Z$$

$$\bar{T}(Z, N) = Z \bar{T}(Z) + N \bar{T}(N)$$

$$= \frac{3}{5} \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{v_0}\right)^2 \left(\frac{9\pi}{4}\right)^{2/3} \frac{Z \cdot Z^{2/3} + N^{5/3}}{A^{2/3}}$$

Entwickeln nach $(N-Z)$:

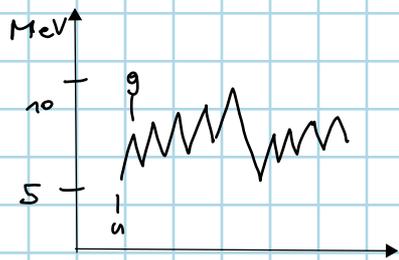
$$\rightarrow \bar{T} \propto \left[A + \frac{5}{9} \frac{(N-Z)^2}{A} \right]$$

\swarrow $E_{kin} \sim$ VolTerm \searrow Korrekturterm

$$\rightarrow B_A = -a_A \frac{(N-Z)^2}{A}$$

Vorfaktoren kommen da rein $\rightarrow a_A = 15 \text{ MeV}$

Paarungsterm: i -Separations E ist für gerade N größer als für ungerade \rightarrow gepaarte N sind stärker gebunden



$$S_n = B(N, Z) - B(N-1, Z)$$

Paarung E : $\Delta \propto \frac{12}{A^{1/2}}$

$$\Delta = \frac{a_p}{A^{1/2}} \delta$$

$$\delta = \begin{cases} 1 & \begin{matrix} Z & N \\ | & | \\ g & g \end{matrix} \text{ Kerne} \\ 0 & \begin{matrix} u & g \\ | & | \end{matrix} \text{ 2 gu} \\ -1 & \begin{matrix} u & u \end{matrix} \text{ Kerne} \end{cases}$$

$$\rightarrow B_{Tr} = a_v A - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_A \frac{(N-Z)^2}{A} + a_p \frac{\delta}{A^{1/2}}$$

\downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow
 15,6 MeV 16,9 0,7 MeV 23,2 11,5

Vergleich mit exp. Werten: schlecht bei leichten Kernen

Kerne mit $A > 40 \sim$ innerhalb 10% ✓

bei magischen Zahlen sind E_B wesentlich größer exp

Es gibt bessere Formeln, die Deformation & Schaleneffekte berücksichtigt.

Aussagen vom Tröpfchenmodell:

$$B_{Tr}(A = \text{const}, Z) = \text{const} - a_1 Z^2 - a_2 (N-Z)^2$$

→ f. gerade $A \geq 2$ Parabeln (d. Paarungseffekte)

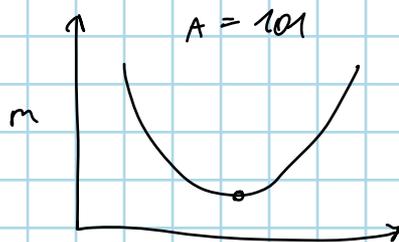
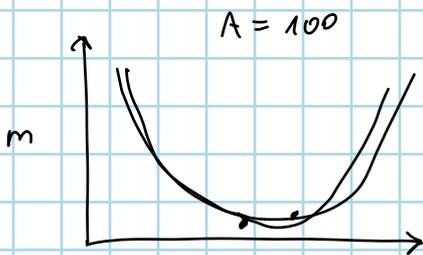
je nach gg od un

f unger. nur 1 Parabel

wenn Q positiv → benachbarte Kerne können inein. übergehen
(β^+ / β^- Zerfall od e^- Einfang)

$A = 100$: 2 Parabeln, ^{mehrere!!} 1 stabile Kerne

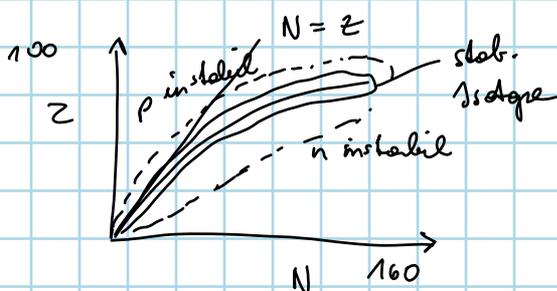
$A = 101$: nur 1 stab. Kern



Für jede A gibt es Lad. Z_0 , wo Masse m min & B max ist.

$$\frac{\partial B}{\partial Z} = 0 \rightarrow Z_0 = \frac{A}{2 + 0,0153A^{2/3}}$$

Auftragen: Z_0 auf N → Kurve d. stabilen Kerne



schwere Kerne: $S_N < 0$

obere Grenzen f. Emission α p & n
 S_n & S_p berechenbar

→ Grenzen der Stabilität

Schalenmodell

FG: ν -freie Nukleonen

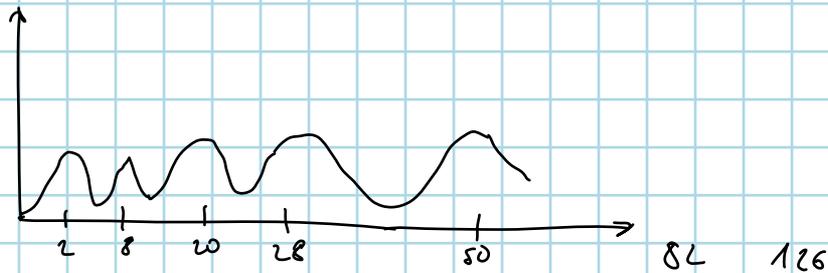
Tr: kurzreichw. ν W mit n -Nachbarn

gute Beschr. d. E_B / Massen

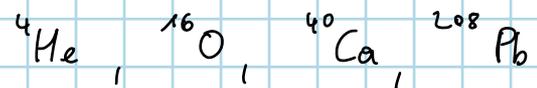
Individuelle Eigenschaften nicht beschreibbar (Spin, Parität, l / magnet. Momente & Anregungs E)

Kerne sind stets stärker geb. als im Tr vorhergesagt

Abweichungen



Doppelt magische sind besonders stabil



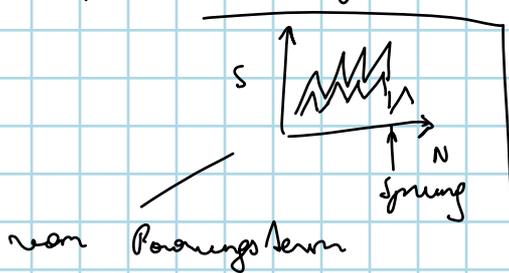
→ Schaleneffekte

Weitere Hinweise:

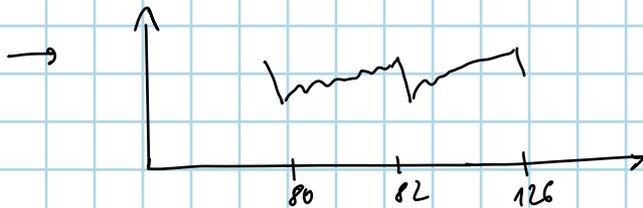
• Separationsenergie:

S macht 'Sprünge' bei magischen Zahlen

Paarungs E abziehen (nur f. ungerade N)



von Paarungskern



• Anzahl d. stabilen Isotope / Isotone: Magische Kerne haben mehr davon!

S_{20} hat 10 Isotope

$N=20$ hat 5 Isotope

Nachbarn haben max 2

• Häufigkeitsverteilung

magie

Kerne mit $N = 50, 82, 126$ sind viel häufiger als Nachbarn

He & D wenige min nach Urknall - primordialen Nukleosyn.

Kerne bis ^{56}Fe in Sternen d. Fusion

Elem. oberhalb d. Neutroneneinfangsreakt.

n - Dichten bei He - Brennen & Supernovaeexp.

Abfolge von β -Zerfällen und Neutroneneinf. führt
zur Häufigkeitsvert. $> ^{56}\text{Fe}$



- H & He sehr häufig! - alle anderen El. weniger.
- Li, Be, B sehr selten
- rel. Häufigk. d. Elem. um $A = 60$ besond. hoch
 E_0 / N hier am höchsten
- Kerne mit $N = 50$ (um Zr), 82 (Ba), 126 (Pb) bes. häufiger
als Nachbarkerne
- Einfangsquerschnitt f. langsam n zeigt Schalenstruktur.
Wirkungsquerschnitt wird min bei mag. Zahlen

weitere: Z & N Abhängigk. d. Quadrupolmoments & damit d.
Kerndeformation; d. Energien & ersten Anregungszust.;
d. spektroskop. Faktoren beim α -Zerfall & d. Halbwertszeit
beim β -Zerfall

Sphärische Potentiale

Schaleneffekte weisen auf Potentialmodell hin \rightarrow Annahme eines
eff. Einteilchenmodells - nicht ww Nuk. in mean field unabh.
voneinander in stat. Zuständen.

mean field von anderen Nuk. erzeugt & als sphärisch angenommen

In Atomphysik naheliegend, in Kernphys. erst überraschend weil
 Dichte d. Nuk + starke W auf hohe Streuwahrsch. schließen lässt
 jedoch Pauli Prinzip \rightarrow keine freien Streuzustände im Kern
 \rightarrow mittl. freie Wegl. groß im Vegl zu Abständen \rightarrow Näherung OK

Suche nach stat. Lsg f. EinT Hamilton

$$\psi(\vec{r}, t) = \underbrace{\psi(\vec{r})}_{\text{Raumanteil}} \underbrace{e^{-i\omega t}}_{\epsilon/\hbar} \quad \epsilon = \hbar\omega$$

magischer Bereich : sphärische Symmetrie

↓ dazwischen : deformierte Kerne / Potis (später)

Entw. in KFF Bindungszust \rightarrow nur 1 Term // keine \sum_{em}

$$\psi(\vec{r}) = R(r) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{L}^2 Y_{lm} = l(l+1)\hbar^2 Y_{lm} \\ \hat{L}_z Y_{lm} = m\hbar Y_{lm} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int d\Omega Y_{lm}^+(\Omega) Y_{l'm'}(\Omega) = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \\ \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^+(\Omega) Y_{lm}(\Omega') = \delta(\Omega - \Omega') \end{array} \right.$$

Ausnutz d. Orthog d. Y_{lm}

$$\rightarrow \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] + V(r) \right\} R(r) = \epsilon R(r)$$

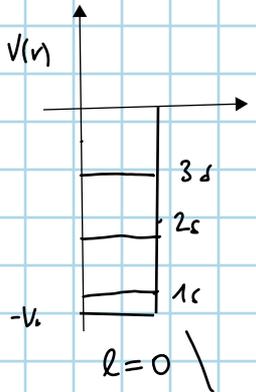
Subst : $u(r) = R(r) \cdot r$

$$\rightarrow \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + V(r) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u_{ne}(r) = \epsilon_{ne} u_{ne}(r)$$

l legt Stärke d. Zentralpot. fest

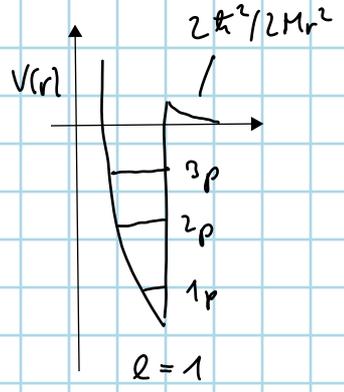
angew. d. rad
 Aufenthaltsw.

radiale Aufenthaltsws. $P_{ne}(r) = \int d\Omega r^2 |\psi_{ne}(\vec{r})|^2 = u_{ne}(r)^2$

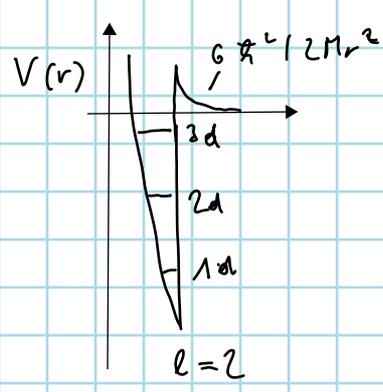


$(n+1)l$

$n \rightarrow$ Anzahl d. Knoten



$l=1$



$l=2$

Überlagerung v. Knoten & Zentralpot.
aus $l(l+1)$

Besondere Entartung im Falle d. Coulomb- & Oszillator-Potio

$V_{\text{Coul}}(r) = -\frac{Z \cdot 4\pi\epsilon_0}{r}$

$V_{\text{HO}}(r) = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2$

Einbildern E d. HQZ N charakterisieren

$E_N = -\frac{1}{2} m c^2 \alpha_f^2 \frac{Z^2}{N^2}$

Coulomb

$E_N = (N + \frac{3}{2}) \hbar \omega$

Oszillator

$N = n + l + 1$

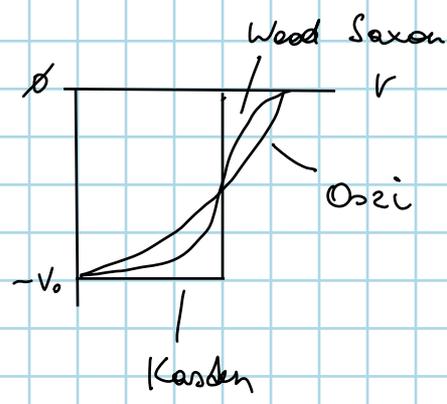
Coulomb

$N = 2n + l$

Oszillator

} $n, l = 0, 1, 2, \dots$

Potentiale :



l hängt nur v. l^2 & s^2 ab \rightarrow

jedes E nur von $2(2l+1) p l n$

besetzt (n, l Unterschalen)

weil $m_s = \pm \frac{1}{2}$ & $m_l = -l \dots l$

Parität d. Unterschalen ist neg

$\pi = (-1)^l$ d. l fixiert

Oszillator : $\pi = (-1)^N$

Oszillogramm $2, 8 \text{ \& } 20$ richtig voraus

$$N_0 = 1$$

$$\frac{1}{3} (1+1)(1+2)(1+3) =$$

$$\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 8 \checkmark$$

N gerade & unger. : $N_N = (N+1)(N+2)$ // T pro Schale

Abschlüsse $N_{HO} = \sum_{N=0}^{N_0} (N+1)(N+2) = \frac{1}{3} (N_0+1)(N_0+2)(N_0+3)$

Erfolg \rightarrow Oszillogramm passt ganz die Kernradius wächst $\propto A^{1/3} \rightarrow$

Breite d. Oszillogramm auch \rightarrow Abstand zw. Schalen (Oszillogramm)

mit $A^{-1/3}$ Richtwert: $\approx \omega_0 = 41 \text{ MeV} \cdot A^{-1/3}$

Realistischeres Pot. dazwischen: Wood Saxon

$$V_{WS}(r) = - \frac{V_0}{1 + \exp\left(\frac{r-R}{a}\right)}$$

Halbpotentialradius \approx Gr. d. Kernrad.
Verschmierung d. Oberfläche etwa $0,6 \text{ fm}$

$V_0 \approx 50 \text{ MeV}$ // entspr. Kernpot.

Energieeigenw. numerisch berechnen (radiale Gl. num.) mit

$$u_{nl} = 0 \text{ f. } r \rightarrow \infty \text{ \& } r \rightarrow 0$$

höhere l Werte werden im WS-Pot. abgesenkt

auch bei Coul. zu Oszillogramm so...

Aufenth. WS der T wandert mit höherem l zu größerem r

Dort ist Kern / WS tiefer als Oszillogramm

Spin - Bahn WW Zentralpot. war f. Schaleneffekte

Wood Saxon bringt keine klassische Beschreibung d. magischen Zahlen

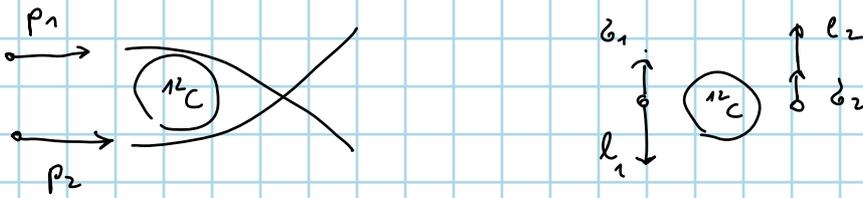
Lösung: $V_{LS} = V' \vec{L} \vec{s}$ // etwa Stärke d. Zentralpot.

Atomphysik: Feinstrukturauflösung mit Coulomb verknüpft
Photonenaustausch

Kernphysik: Effekt klein zu Kernkräften - Mesonenaustausch
umgekehrtes VZ zur Atomphysik

Untersuchung d. LS-Kopplung in Streuexp.

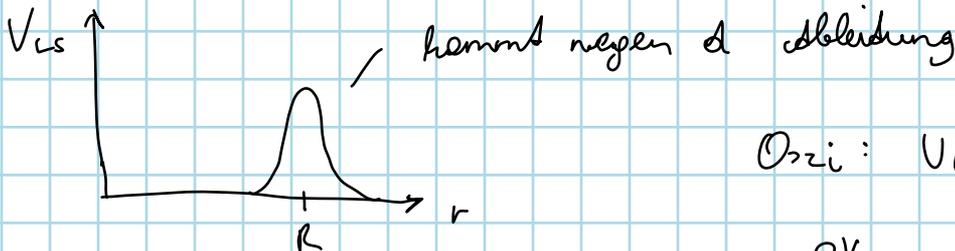
Spin Bahn WW hängt von Ausrichtung des Spins ab!



Auswirkung macht sich vor allem an Oberfläche bemerkbar, da Nuklidichte sich hier schnell ändert (wenn mehr Nachbarn als außen)

Dichtewert ist \propto zu Zentralpot. \rightarrow man verwendet folg. V_{LS}

$$V_{LS}(r) = -k \frac{1}{r} \frac{dV(r)}{dr} \vec{l} \cdot \vec{s} \quad \text{zB Wood Saxon}$$



$$\text{Oszil: } U(r) = \frac{m\omega^2}{2} r^2$$

$$\rightarrow \frac{dU}{dr} = m\omega^2 r$$

$$\rightarrow V_{LS} = -k \frac{1}{r} m\omega^2 r \vec{l} \cdot \vec{s}$$

$$= -k \frac{\hbar^2}{2} m\omega^2 \frac{2}{\hbar^2} \vec{l} \cdot \vec{s}$$

$k' ?$

$$= -k' \frac{2}{\hbar^2} \vec{l} \cdot \vec{s}$$

$\vec{l} \cdot \vec{s}$ vert. mit j^2 $\rightarrow |n l j m\rangle$ sind EZ des Ops.

$$V_{LS}(r) = -k' \{ j(j+1) - l(l+1) - s(s+1) \}$$

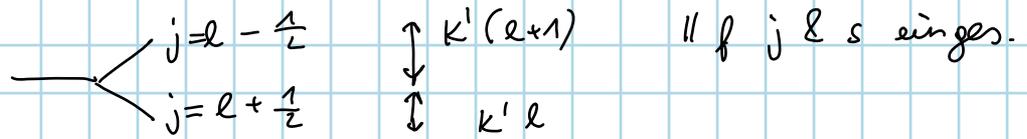
$$\rightarrow \kappa'(l+1) \quad \text{f. } j = l - \frac{1}{2}$$

$$-\kappa' l \quad j = l + \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \text{höhere } j \text{ sind tiefer}$$

(n, l) Unterschalen werden nach j aufgespalten

// Entartung bröckelt

m_j : $(2j+1)$ fach



Bei Atomkernen ist es umgekehrt, wie bei e^- Külle

$$\Delta E = \epsilon_{j=l-\frac{1}{2}} - \epsilon_{j=l+\frac{1}{2}} \approx 10 (2l+1) A^{-2/3} \text{ MeV}$$

$$\kappa' l + \kappa'(l+1) = \kappa'(2l+1) \quad \checkmark$$

Liegt f. große l in Größenord. d. Abstände d. Oszillatorschalen

→ Nukleonen magic numbers: 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126

folgt daraus, dass

• für $N=3$ 1f_{7/2} eig. Hauptschale bildet

• ab $N=4$ die höchst j Unterschale in vorige Hauptschale gesenkt wird

Probleme: Coulomb Kern. nötig → Umordnung d. j Untersch.

ab $Z=50$ → statt 126 (114)

↓
mit fix

Spin, Parität & magnet. Moment vorhersagbar
Kernanregungen

Schon im Einzelteilchenmodell gute Vorhersagen (nur Eigensch. eines einz. unges. Nukl. außerhalb abg. Schale)

Bsp: Kern ^{17}O hat im Grundz Spin = $5/2^+$ weil

ung n auf 1d_{5/2} Schale

^{15}O : Spin $1/2^+$, da 1n auf 1p_{1/2} fehlt

Für mehr als 1 Nukl. außer schwierig, da es Rest WW gibt

Kopplung der Drehimpulse hängt vom System ab

Annahme: $j_1 j_2$ Kopplung

In gerade durch Kopplung Nukl. zu $J_{\text{min}} = 0$ gg Kern GZ: $J_{\text{min}} \neq 0$

gg & gg Kerne Nukl. in j -Schale zu $J=j$, selten $J=j-1$

uu Kerne: Tendenz + großes J

$$|j_p - j_n| \leq J \leq j_p + j_n$$

Restwechselwirkung

Eig. gibt es kein Zentralpot., sondern Pot. ist Summe aller

NN WW!

$$V = \sum_{i < j} \frac{V_{NN}^{ij}}{r} (|\vec{r}_i - \vec{r}_j|)$$

zu schwache Bindung mit allen
NN Pot. \rightarrow Dreikörperkräfte nötig

zu kompliziert - keine guten Theorien \rightarrow Vernachlässigung + Näherung

(da oberes Pot. sich nur nähern lässt)

$$V = V_{\text{Schalenmod}} + V_{\text{Rest}}$$

so optimiert, dass V_{Rest} geringe Störung ist

kommt aus Stößen im Schalenmod. Pot.

Bedingungen: • Nukl. vor Stoß in Schalenmod. Zust. a

Nach Stoß in versch. unbes. Zust. e

• Energieerhaltung / Osz. Modell: $E_1 + E_2 = -V_0 + (N_1^a + \frac{3}{2}) \hbar \omega$

$$-V_0 + (N_2^a + \frac{3}{2}) \hbar \omega$$

$$= -V_0 + (N_1^e + \frac{3}{2}) \hbar \omega - V_0 + (N_2^e + \frac{3}{2}) \hbar \omega$$

$$\Rightarrow N_1^a + N_2^a = N_1^e + N_2^e$$

needer Zustand

• Drehimpulserh.: $\vec{j}_1^a + \vec{j}_2^a = \vec{j}_1^e + \vec{j}_2^e$

$$m_1^a + m_2^a = m_1^e + m_2^e$$

• Paritätsüberhaltung: Gesamtdrehimpuls Q_2 vor & nach Stoß erchw.

gerade od. ungerade

Zeit einer Periode im Kern

WW darf Energieerhaltung verletzen innerhalb $\Delta t = \hbar / \Delta E$

$$40 \text{ MeV } E_{\text{kin}} \rightarrow \Delta t \approx 4 \cdot 10^{-22} \text{ s} \quad \Delta E \leq 1,5 \text{ MeV}$$

Viel kleiner als selbst zw. Hauptschalen ($41 \cdot A^{-1/3} \text{ MeV}$)

→ keine RWW zwischen Zuständen versch. Hauptschalen

Betrachten einen Kern mit abg. HS N_0 und einigen Nukl. in

$N_0 + 1$ // Bei vollen HS gibt es keine Stöße wegen Pauli Prinzip

Bei nur 1 Nukl. außen gibt es keinen Stoßpartner → kein Stoß

Fall: 2 Nukl. in $N_0 + 1$

$$Q_2: AZ (n^a, l^a, j^a, m^a); (n^a, l^a, j^a, -m^a)$$

$$EZ (n^e, l^e, j^e, m^e); (-n^e, -l^e, -j^e, -m^e)$$

gleiches j , aber untersch m : $\vec{j}_1 + \vec{j}_2 = 0 \quad m_1 + m_2 = 0$

→ gerade Gesamtdrehimp. d. Paares

^{18}O : $N=1$ voll, $N=2$ mit $2n$ besetzt → 2 & w Anregungs \in

Mögl. f $N=2$: $N=2n+l$

$$n=0 \quad l=2$$

$$n=1 \quad l=0$$

$$\begin{matrix} (n+1) \\ 1 \text{ d } \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \\ 2 \text{ s } \frac{1}{2} \end{matrix}$$

| | | | | | | | |
|---|-------|----------------|----------------|----------------|---------------|---------------|---------------|
| | | $1d_{5/2}$ | | | $2s_{1/2}$ | $1d_{3/2}$ | |
| → | j_1 | $\frac{5}{2}$ | $\frac{5}{2}$ | $\frac{5}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{3}{2}$ |
| | m_1 | $\frac{5}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| | j_2 | $\frac{5}{2}$ | $\frac{5}{2}$ | $\frac{5}{2}$ | | | |
| | m_2 | $-\frac{5}{2}$ | $-\frac{3}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | | | |
| | | A_1 | A_2 | A_3 | A_4 | - | - |

WF ist Linearkomb. dies. Zustände

$$\psi = \sum_{i=1}^6 A_i d_i$$

$$\sum_{i=1}^6 |d_i|^2 = 1$$

WS für Zust A_i

Zustände unterscheiden sich nur in magn QZ → gleich wahrscheinl.

$$|d_1|^2 = |d_2|^2 = |d_3|^2 = \frac{|a_1|^2}{3} \quad \text{f } 5/2 \text{ Zust}$$

$$|d_4|^2 = |b_1|^2$$

Alle Paare koppeln zu Spin = 0 (siehe oben)

$$\psi(^1S_0) = a_1 (1d_{5/2})_0 + b_1 (2s_{1/2})_0 + c_1 (1d_{3/2})_0$$

Konfiguration: Liste von besetzten Unterschalen Drehimpulskopplung
angegeben: Terme

Verschiedene Terme zu einer Konfiguration möglich

Zustand: Eigenschg von H mit def. Spin, Parität, Energie, Drehimpuls

↓ Vermischte Eigensch. d. Kern WW → Zustand ist lin. Komb von Termen

nach immer orthogonal & Anz nicht verändert

(Konfigurationsmischung)

Einwirkungen auf Gesamtenergie:

$$H_{\text{scherm}} \phi_i = \epsilon_i \phi_i$$

// nur Schermod.

$$\text{Gesamt: } \psi = \sum_i c_i \phi_i$$

// Konfigurationsmischung

Einsetzen in SGL \rightarrow

$$e_j \epsilon_j + \sum_i V_{ji} e_i = E e_j$$

Energie von Schalenmodell

$$V_{ji} = \int d^3r \psi_j^+ V_{\text{res}} \psi_i$$

hier läuft j über alle Konfigurationen δ_i auch

\rightarrow Matrixgl. f. ^{18}O (Eigenwertprobl.)

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 + V_{11} & V_{12} & V_{13} \\ V_{21} & \epsilon_2 + V_{22} & V_{23} \\ V_{31} & V_{32} & \epsilon_3 + V_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

EW gl. lösen

Bsp ^{18}O $\phi_1 = (1d_{5/2})$ $\phi_2 = (2s_{1/2})$ $\phi_3 = (1d_{3/2})$

Info über Rest WW ist in V_{ij} enthalten

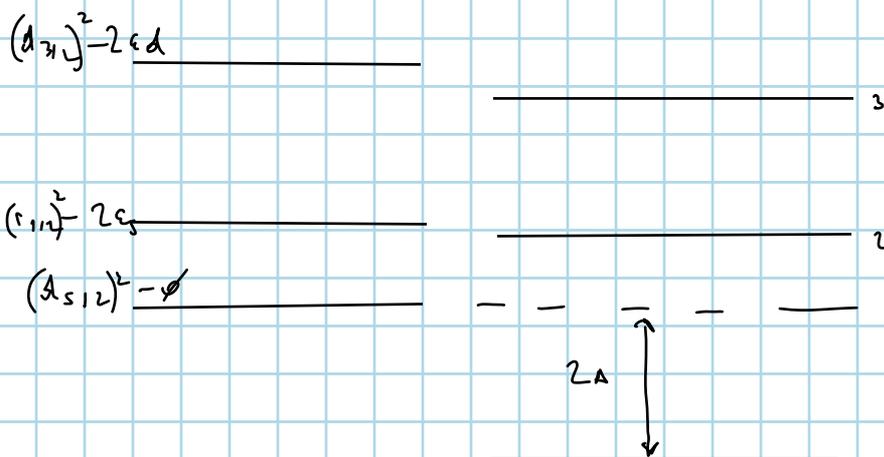
Schematisches Modell um Rest WW zu begründen: alle $V_{ij} = \bar{U} < 0$

Log: $\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \phi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_2 + \frac{1}{\sqrt{3}} \phi_3$ $E_1 - \epsilon = 3\bar{U}$ attraktiv

$\psi_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \phi_3$ $E_2 - \epsilon = 0$

$\psi_3 = \frac{2}{\sqrt{6}} \phi_1 - \frac{1}{\sqrt{6}} \phi_2 - \frac{1}{\sqrt{6}} \phi_3$ $E_3 - \epsilon = 0$

ψ_1 : Energie stark abgesenkt! (ψ_2 & ψ_3 bleiben gleich (Paarung))



Spin Bahn aufsp. berührt

$$\left(\frac{R_x}{R_z}\right)^2 = \left(\frac{R_y}{R_z}\right)^2 = 1 - \varepsilon^2 = 2 \frac{1 - \varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2} \quad \varepsilon^2 = \frac{2\varepsilon^2}{3 - \varepsilon^2}$$

$$\frac{x^{-116}}{x^{115}} = x^{-116-115} = x^{-316} = (x^{-112})^3 = \frac{1}{x^3}$$

$$V = \frac{4\pi}{3} R_x^2 R_z \quad /, R_z^3$$

$$\frac{V}{R_z^3} = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{R_x}{R_z}\right)^2 = \frac{4\pi}{3} (1 - \varepsilon^2)^{-1} \stackrel{?}{?}$$

$$\frac{C}{R_z^3} = (1 - \varepsilon^2)^{-1} \quad C=1$$

$$\rightarrow R_z = (1 - \varepsilon^2)^{1/3} = \left(1 + \frac{2}{3}\delta\right) R_0$$

$$R_x = R_y = (1 - \varepsilon^2)^{-1/6} = \left(1 - \frac{1}{3}\delta\right) R_0$$

$$\delta = (R_z - R_x) / R_0 \quad \delta > 0: \text{ Zigarre}$$

$$\delta < 0: \text{ Diskus}$$

def. harmon. Osz. , dann Freqw. Änderung

$$\omega_x = \omega_y = \omega_0 \left(1 + \frac{2}{3}\delta\right) \quad \omega_z = \omega_0 \left(1 - \frac{4}{3}\delta\right)$$

$$\rightarrow \text{Pot. } V(r) = \frac{m}{2} (\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2) + C \vec{\ell}^2 + D \vec{\ell}^2$$

Sphärischen Anteil rausziehen (das $\omega_0^2 x^2 \dots$)

/
für Wood Saxo
Reproduktion

→ Deformationsform $V_0(r, \delta) \chi_{20}$

→ Kopplung der Partialwellen

Mixtures sind von Deformationsgrad abh.

Kollektive Anregungen

Anregung durch Energiezufuhr zu Schwingungen & Rotationen

Betrifft nur Mühl. außerhalb abgeschlossener Schalen -
kollektive Oberflächenschwingungen die d. langreichweitige
Anteile d. WW dominiert werden (nicht Rest WW)

Kleine Anregung $E \rightarrow$ Abregung über γ -Quanten & nicht
d. T Emission.

Vibrationen

Entwickl d. Kernverfl. nach Kugelflächenfkt

$$R(\theta, \varphi) = R_0 \left[1 + \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \alpha_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}(\theta, \varphi) \right]$$

Mod d. sphär. Kerns

$\alpha_{\lambda\mu}$, Entwicklungscoeff

zeit. Konst., permanente Deformation

Schwingungen: α zeitabhängig

R reell $\rightarrow \alpha_{\lambda\mu}^* = (-1)^\mu \alpha_{\lambda, -\mu}$

$\gamma_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$

$\lambda = 0$: Mode ohne Winkelabh.

\rightarrow Dichteschwingungen



γ_{10}



γ_{20}



γ_{30}

Es gibt d. & magn. Verteilungen /

Anregungen

$\lambda = 1$ Dipol
schw.

$\lambda = 2$
Quadrupol
schw.

// bei Rotationssymm.
um hor. Achse $\rightarrow \mu = 0$

Quadrupolanregung:

$$R(\theta, \varphi) = R_0 \left[1 + \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \alpha_{20} P_2(\cos \theta) \right]$$

Deformationspar. β_2

$$\delta = \frac{R(\theta) - R(\pi/2)}{R_0} = \left(\frac{45}{16\pi} \right)^{1/2} \beta_2 = 0,946 \beta_2$$

Schwingungen kleiner Amplit.

$$\hat{H}_\lambda = \underbrace{\frac{1}{2} C_\lambda \sum_{\mu} |a_{\lambda, \mu}|^2}_{\approx E_{\text{pot}}} + \underbrace{\frac{1}{2} D_\lambda \sum_{\mu} \left| \frac{d a_{\lambda, \mu}}{dt} \right|^2}_{\approx E_{\text{kin}}}$$

$\approx \text{Masse}$

\approx Rückstellkraft

$$\omega = \sqrt{\frac{C_\lambda}{D_\lambda}}$$

$$E_{N, \lambda} = \left[N_\lambda + \frac{1}{2} (2\lambda + 1) \right] \hbar \omega$$

\approx harm. Oszillator

N_λ : Zahl der Phononen

\rightarrow Anregungsspekt. mit äquidist. Niveaus

Rotierende Kerne

Def. Kern kann kollektive Drehimp. \vec{K} haben bildet mit Spin \vec{J} den Valenzzahl der Ges. Spin \vec{I}

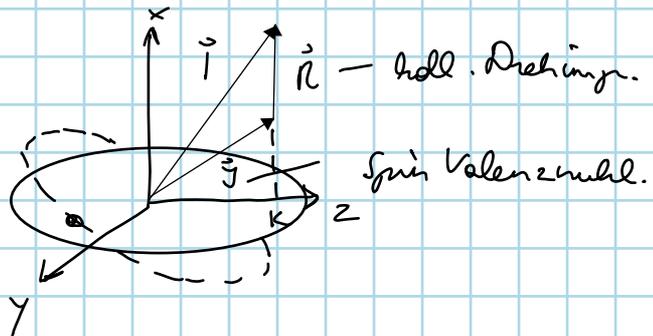
\vec{K} & Trägheitsm versch bei sphärischen Kern & Anregungsspek. zeigen nicht char. von Rotationspektren (wachsender Niveaulastand)

Phononenanz. bleiben (äquidistant) & Einheitschenanz. (sinkend)

Schwere def. Kerne (gg zB): kollektive Rotationszust

10-50% des Trägheitsm eines starren Körpers

Schematische Skizze:



Raum- x, y, z & Körperfeste Achsen $1, 2, 3$

Drehimpulszust eines def. Kerns: (I^1, I^2, I^3) gekennz.

Trafo d. WF zwischen Koord. Syst mit Kreisel. D_{IK}^I

D'_{mk} sind $(2I+1)$ dim Darstellungen des Dreiecks f. Euler.

$$\hat{D}(\theta) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \theta_1 \hat{J}_z\right) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \theta_2 \hat{J}_y\right) \exp\left(\frac{i}{\hbar} \theta_3 \hat{J}_z\right)$$

$$D'_{mk} = \langle M | \hat{D} | k \rangle$$

$$\hat{I}^2 D'_{mk}(\theta) = I(I+1) \hbar^2 D$$

$$I_2 D = M \hbar D$$

$$I_3 D = k \hbar D$$

hat Kern d. äußere Mittel Drehimpuls $\vec{\hat{J}}$ mit EW $J(J+1)\hbar^2$
(nicht abgesetzte) $\& \Omega \hbar$

$$\rightarrow \text{WF: } |\Omega\rangle |k\rangle |M\rangle = \frac{\sqrt{2I+1}}{4\pi} \left[X_{\Omega}^J D'_{mk} + (-1)^{l-j} X_{-\Omega}^J D'_{m,-k} \right]$$

\nearrow X sind EF von $\vec{\hat{J}}$

Phasenfaktor berücks., dass WF nicht von Orient d. z-Achse abh. (Körper) darf

$$\text{Hamiltonian: } H_{\text{rot}} = \frac{1}{2\theta_1} \hat{R}_1^2 + \frac{1}{2\theta_2} \hat{R}_2^2 + \frac{1}{2\theta_3} \hat{R}_3^2$$

θ_i sind Rotationsmomente

$$\vec{\hat{I}} = \vec{\hat{J}} + \vec{\hat{R}} \quad \text{einsetzen}$$

$$\vec{\hat{I}}^2 = (\vec{\hat{J}} + \vec{\hat{R}})^2 = \hat{J}^2 + 2\hat{J}\hat{R} + \hat{R}^2$$

$$\rightarrow H_{\text{rot}} = \frac{\theta_1 + \theta_2}{4\theta_1\theta_2} \left[(\hat{I}^2 + \hat{J}^2) - (I_3^2 + J_3^2) \right] + \frac{1}{2\theta_3} (I_3 - J_3)^2$$

$$+ \underbrace{\frac{\theta_1 - \theta_2}{4\theta_1\theta_2} \left[I_2^2 - I_1^2 + J_2^2 - J_1^2 \right]}_{\text{3.T}} - \underbrace{\left[\frac{1}{\theta_1} I_1 J_1 + \frac{1}{\theta_2} I_2 J_2 \right]}_{\text{Coriolis T}}$$

Coriolis: vernachlässigt bei kleinen Drehimpuls

$$\text{Rotationsell: } \theta_1 = \theta_2 \Rightarrow \text{3.T} = \emptyset$$

gg Kerne im Grundzust ($J\pi = 0^+$) $\rightarrow J = \Omega = 0$

$$\Delta E_{rot} = \frac{\hbar^2}{2\theta} [I(I+1) - K^2]$$

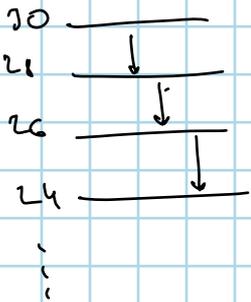
aus
Kern in H_{rot}

wobei $K \leq I$ $I = K, K+1, \dots$

Für $K = 0$ Rotationsbande schon im Grundzust

Symmetrie d. WF & $J = 0 \rightarrow (-1)^I$ im 2.T

\rightarrow nur gerade I Werte $0, 2, \dots$



Übergänge sind d. Quadrupolüberg.

Ergibt sich aus Analyse d. Richtungskorrel.

d. ermittel. γ Strahlen

Es wurden Zust bis $I = 30$ beob. $\theta = konst$: Abstände zw.

Nucleus wachsen hin mit $I \rightarrow$ mit steig I mehr Nukl an
Rot. beteiligt

Quadrupolm. eines def. Kerns: $Q = \frac{3K^2 - I(I+1)}{(I+1)(2I+3)} Q_0$

/
spektroskopisches Quadr.

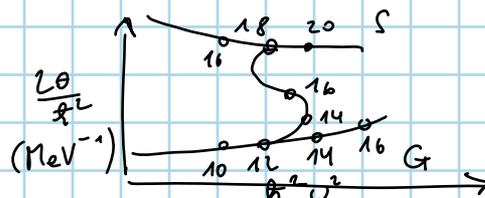
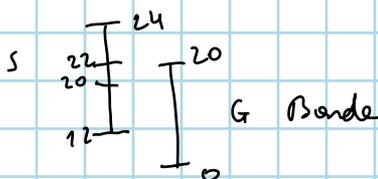
Konstante deutet auf nicht ändernde Kernform hin!

schnell rot. Kerne: Kugelförm. nicht egal

Ausreichend hohes I : Aufbruch von Nuklearen \rightarrow

eff. Verh. d. Trägheitsmoments - Kern geht in Anregungszust.

über GZ Bande auf 1. ang. Bande (Stadium B)



Trägheitsm. ab
Fht von Erst